ЭДВАРД Л. МКРТУМЯН

МАТРИЧНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

ЕРЕВАН 2017

Глубокоуважаемый Рубен Викторович,

в статье Мкртумяна приведено простое доказательство известного постулата Бертрана. Впервые этот постулат был доказан Чебышевым в прошлом веке. В начале нашего века его передоказали, (в более сильной варианте) Адамар и Валле-Пуссен. Точнее, они доказали знаменитый асимптотический закон простых чисел, а из этого закона следует постулат Бертрана как следствие.

Мкртумян предлагает другой вариант доказательства этого постулата. Его подход представляет профессиональный интерес, для специалистов т.к. он основан на методе решета Эратосфена в новой форме - матричный вариант автора. До этого не удавалось получить методом решета оценки снизу подних той которая указана в заглавии статьи. Поэтому интерес представляет не столько результат, сколько подход. Может быть его удастся перенести и на другие проблемы.

Искренне Ваш А.Виноградов

1 11 96

Рецензент А.И. Виноградов

ТЕОРИЯ МАТРИЦ ОСТАТКОВ

Э. Л. Мкртумян
Ереван, Армения

Содержание

От автора 2
Введение 4
1. О некоторых задачах распределения простых чисел 6
2. Об оценке количеств простых чисел в определенных промежутках 18
3. О некоторых проблемах простых чисел 24
4. О простых и взаимнопростых числах в специальных промежутках I 29
5. О простых и взаимнопростых числах в специальных промежутках II 36
6. Смежные матрицы остатков и метод решета 45
7. Матрицы остатков и проблема Шинцеля 50
8. Проблема Гольдбаха 60

От автора

Настало время, чтобы математика
обошлась только целыми числами

Еще со школьной скамьи я заметил, что в математике на числовой оси не все логически оправдано. Например, никак не мог осмыслить, как квадрат отрицательного числа становится положительным, и $0! = 1$. В студенческие годы эти сомнения усилились, особенно когда ознакомился с теоретической физикой.

Превращение правильного вписанного многоугольника в окружность с помощью удвоения числа его сторон - это что-то похожее на то, когда звезды принимаются за точку. Понятия “бесконечно малого” и “бесконечно большого”, которые привели к непрерывности числовой оси и созданию дифференциального и интегрального исчисления, только пригодны для решения повседневных задач. Они становятся беспомощными, когда затрагиваются вопросы “бесконечно малых” и “бесконечно больших” размеров, потому что игнорируется прерывистость числовой оси.

Такие ученые, как Лоренц, Хэвисайд, Адамар и Пуанкаре заметили относительность результатов математических операций на числовой оси, что легло в основу теории относительности Эйнштейна. Но выйти из "порочного круга"существующей математики, вызванного непрерывностью числовой оси, пока никому не удалось.

Математика с одной стороны отрицает существование самого большого числа, доказывает бесчисленность простых чисел, а с другой стороны принимает число ноль кратным всем целым числам. Многие математики (Рашевский, Рвачев) не согласны с этим и с понятием бесконечности на основе аксиомы Архимеда.

Поэтому решили, оставляя неприкосновенным аксиому Архимеда, создать новую теорию, которую следуя известному математику Аскольду Ивановичу Виноградову (Петербург, ЛОМИ), называем матричной математикой. Основой матричной математики является утверждение о различии числа от его порядкового номера на числовой оси. Мы полагаем, что на числовой оси существуют только простые и составные числа. Остальные (дробные, иррациональные, мнимые и т.д.) являются искаженными представлениями целых чисел, и лишь точ-

ками на числовой оси, учитывая относительность выбора начала отсчета.

Этот сборник статей состоит из отдельных глав, расположенных исторически по мере того, как они писались. К сожалению, из-за нехватки времени многие вопросы матричной математики (например, оценки функции $\pi(x)$, степенные матрицы остатков, фокусные расстояния в матрицах, теоремы Ферма, проблемы криптографии и т.д.) остались за пределами данного сборника. Надеюсь еще написать про них во вторуй части этой книги, а если не успею, ее напишут следующие поколения.

Этот сборник рассчитан на читателей, интересующихся математикой. Материал изложен общедоступно и предельно просто. Но не следует читать как художественную литературу, так как в сборнике затрагиваются основы нового подхода к существующей математике, поэтому каждая фраза требует глубокого осмысления. Переходить к следующей статье следует лишь после приведения к общему знаменателю изученного. Матричная математика является альтернативой существующей математике.

Если читателю покажется, что некоторые утверждения сомнительны и плохо доказаны, обозначения неудачные, выражения не очень гладко оформлены, пусть простит. Мои работы может быть и не гладко оформлены, но по-моему не могут быть неверными.

Приношу огромную благодарность академику НАН РА М.А. Казаряну (ФИАН, Москва) и докторам наук В.Андрееву (ФИАН, Москва), З. Данояну и Г.С.Сукиасяну (ИМ НАН РА, Ереван) за ценные советы и критические замечания.

Список литературы

[1] П.К. Рашевский “О догмате натурального ряда”: Успехи Мат. Наук, т. 28, вып. 4(172), с.243-246, 1973.

[2] В.Л. Рвачев “Неархимедова арифметика и другие конструктивные средства математики, основанные на идеях специальной теории относительности”: Доклады АН СССР, т. 316, вып. 4, 1991.

Введение

Математик, ищущий истину с помощью
непрерывности числовой оси, похож на слепую белку,
которая неустанно бегает в чертовом колесе
и думает, что скоро дойдет до края света.

В нашем сознании сложение означает прибавление некоторому количеству предметов какого-то количества других таких же (иногда и не таких) предметов, получая их общую сумму. При этом не учитывается с какого предмета и в каком направлении велось сложение.

На числовой оси сложение объектов производится так: считается, что эти предметы расположены вдоль одной виртуальной прямой, складываются обязательно с правого конца в правую сторону, заменяя объекты одинаковыми плотно расставленными отрезками единичной длины. В результате получаем точку, которая отдалена от начала числовой оси на определенное количество отрезков единичной длины.

Напрашивается вопрос: начало числовой оси есть точка или число? Ответ на этот вопрос не однозначен, потому что число n на числовой оси характеризуется $n + 1$ точками. Существующая математика на этот вопрос не отвечает четко. Не отвечает и на вопросы: что станет с этой суммой, если поменять начало или масштаб числовой оси?

Не отвечает потому, что не различает начало числовой оси от начала расчета, забывая, что начало числовой оси лишь точка, а начало расчета - это первый предмет (отрезок) от которого начинается расчет, и число 1 находится от числа 0 на таком же расстоянии, что и число 2 от числа 1, или число $n + 1$ от числа n.

Отсутствие различия начала числовой оси от начала расчета приводит к появлению на числовой оси дробных, иррациональных, трансцендентных, комплексных чисел и мнимых корней уравнений. В этом заключается главный недостаток существующей математики, который приводит к тому, что результаты математических операций на числовой оси стали некоммутативными, т.е. относительными.

Используя радиус-векторы, фокусные расстояния, дуализм квантов и т.д. физики всячески старались "сгладить"недуги математики и добились заметных успехов. Им конечно помогли экспериментальные данные, а математика осталась на "первобытном уровне".

Так как четные числа (по отношению начала числовой оси) относительно нечетных, перемещены на единицу вправо (или влево, смотря в какую сторону смотреть), поэтому математика на числовой оси стала однобокой, а математические действия приобрели направление (к примеру: сложение и умножение - в правую сторону, а вычитание и деление - в левую).

Мне совершенно непонятно, число "минус"$2n$ является четным или нечетным?! Ведь знак "минус"показывает только направление! А $2n$ последовательных натуральных чисел показывают, что среди них есть n четных и n нечетных чисел, а больше ничего.

Логика, по которой 0 кратно всем числам ($0! = 1$) деление чисел сводит к делению единицы масштаба числовой оси, т.е. считая количество точек в единичном отрезке бесчисленным, принимается, что $1 =$ "беконечности"! Однобокий подход к нулю как числу превращал ее в фикцию, и числа на числовой оси становились равноправными.

От этих недостатков свободна матричная математика, в которой введено глобальное понятие натурального нуля $O_n = \prod_{i=1}^{m} p_i, m = \pi(n)$. В матричной математике, ограничивая отрезок числовой оси, определяют поведение математических операций на этом отрезке, а затем распространяют их на большие отрезки. Для этого в матричной математике создано основополагающее понятие *матрицы остатков*, где нулевой остаток уже не фикция, а реальный объект.

Чтобы четные и нечетные числа были расположены симметрично относительно какой-нибудь точки в матричной математике рассматривают матрицу остатков с нечетным числом столбцов. Средний столбец такой матрицы становится осью симметрии. В матричной математике фундаментальное значение имеет матрица $M_{m,2n+2}(O_n)$, где $m = \pi(n)$, крайние столбцы которой соответствуют числам O_n и $2n$, а средний столбец – числу n, четность которого не всегда зависит от четности крайних столбцов. Поэтому матричная математика показывает, что четность на числовой оси понятие относительное, что приводит к относительности всех математичиских операций на числовой оси.

Матричная математика старается развивать математику на числовой оси по логике самой математики, а не по логике величайших математиков!

1 О некоторых задачах распределения простых чисел

Настоящая статья посвящена иследованию некоторых задач распределения простых чисел. Исследование проводится методом матриц остатков, который разработан автором.

1.1 Введение

Об оценке разности [1]

$$\pi(n^2+n)-\pi(n^2), \tag{1.1}$$

где n-целое число, функция $\pi(n)$ - количество простых чисел, не превосхадящих n, ничего не известно, даже не известно, что

$$\pi(n^2+n)-\pi(n^2)\geq 1. \tag{1.2}$$

Но не думаем, что специалисты мало занимались этим вопросом, так как в литературе часто говорится о нем [2,3].

Из истории математики известно, сколько времени и труда потребовалось для доказательства постулата Бертрана [4]

$$\pi(2n)-\pi(n)\geq 1. \tag{1.3}$$

Видно, что оценки (1.2) и (1.3) тесно связаны между собой.

Как видно из вышесказанного, теория чисел нуждается в новом подходе к проблемам распределения простых чисел.

Как мы думаем, на роль такого подхода может претендовать метод матриц остатков [5], который многие вопросы аддитивной теории чисел приводит к одной плоскости.

Цель этой статьи: с помощью нового метода доказать (1.3) и оценить (1.1) снизу.

1.2 Матрицы остатков

Рассмотрим следующую матрицу, которую называем матрицей остатков:

$$M_{m,n}(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

где $a_{i,j}$ - остаток от деления числа $\lambda_j = \lambda + j - 1$ на P_i, P_i – i-тое простое число, $\lambda \geq 0$ – целое число, $n \geq 2$ – натуральное число, $m = \pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих n, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$. Например, для $n = 7$, $\lambda = 0$ имеем $m = 4$ и

$$M_{m,7}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

А для $\lambda = 1$, $n = 7$ матрица $M_{4,7}(1)$ имеет вид

$$M_{4,7}(1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь первая вспомогательная строка содержит числа $\lambda_j = \lambda + j - 1$, а первый вспомогательный столбец содержит простые числа P_j. $a_{i,j}$ - остаток от деления числа $\lambda_j = \lambda + j - 1$ на P_i. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.1 *Для любого натурального n*

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(1) = \pi(n) - \nu(n),$$

где $\overline{M}_{m,n}(\lambda)$ – количество нулевых элементов (нулей) матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, $\nu(n)$ – количество различных простых делителей числа n.

Доказательство. Сопоставление матриц $M_{m,n}(0)$ и $M_{m,n}(1)$ показывает, что j-тый столбец матрицы $M_{m,n}(0)$ начиная со второго столбца, совпадает с $j - 1$-ым столбцом матрицы $M_{m,n}(1)$. Причем в матрице $M_{m,n}(0)$ первый столбец отличается от всех столбцов матрицы $M_{m,n}(1)$, а последний столбец $M_{m,n}(1)$ отличается от всех столбцов матрицы $M_{m,n}(0)$.

Первый столбец матрицы $M_{m,n}(0)$ содержит $\pi(n)$ нулей, а последний столбец матрицы $M_{m,n}(1)$ содержит $\nu(n)$ нулей, следовательно,

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(1) = \pi(n) - \nu(n).$$

Теорема 1.2 *Для любого целого* $\lambda \geq 0$

$$\overline{M}_{m,n}(0,i) \geq \overline{M}_{m,n}(\lambda,i) \geq \overline{M}_{m,n}(1,i),$$

где $\overline{M}_{m,n}(\lambda,i)$ *есть количество нулей* i*-той строки матрицы* $M_{m,n}(\lambda)$.

Доказательство: Нетрудно убедиться, что

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda,i) = \overline{M}_{m,n}(0,i), \quad \text{если} \quad \lambda+a_i \equiv 0(mod\ P_i),\ \lambda+n-b_i \equiv 0(mod\ P_i),$$

$$0 \leq a_i < \frac{P_i-1}{2}, \quad 0 \leq b_i < \frac{P_i-1}{2},$$

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda,i) = \overline{M}_{m,n}(1,i), \quad \text{если} \quad \lambda+a_i \equiv 0(mod\ P_i),\ \lambda+n-b_i \equiv 0(mod\ P_i),$$

$$a_i > \frac{P_i-1}{2}, \quad b_i > \frac{P_i-1}{2}.$$

Следовательно, теорема доказана.

Следствие 1

$$\overline{M}_{m,n}(1) \leq \overline{M}_{m,n}(\lambda) \leq \overline{M}_{m,n}(0).$$

Доказательство следует из равенств:

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{M}_{m,n}(1,i) = \overline{M}_{m,n}(1), \quad \sum_{i=1}^{m} \overline{M}_{m,n}(\lambda,i) = \overline{M}_{m,n}(\lambda),$$

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{M}_{m,n}(0,i) = \overline{M}_{m,n}(0).$$

Обозначая

$$c(m,n,\lambda) = \overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1), \tag{1.4}$$

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(\lambda) = \pi(n) - c(m,n,\lambda) - \nu(n), \tag{1.5}$$

$$0 \leq c(m,n,\lambda) \leq \pi(n) - \nu(n).$$

1.3 Подобные матрицы остатков

Определение 1 *Две матрицы называются подобными, если они имеют одинаковую ширину $m = \pi(n)$ и длину n.*

Так например, подобными являются матрицы $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(\lambda)$. В дальнейшем полагаем $n \leq \lambda$. Расположим в матрицах $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(\lambda)$ столбцы по максимальной выборке нулей справа налево. Тогда среди выбранных k столбцов нет столбца содержащего меньше нулей, чем любой невыбранный столбец.

Обозначим через $\overline{M}^k_{m,n}(\lambda)$ суммарное количество нулевых остатков k столбцов данной матрицы.

Имеет место теорема.

Теорема 1.3 *Для любого целого $\lambda \geq n$*

$$\overline{M}^k_{m,n}(\lambda) - \overline{M}^k_{m,n}(1) \geq 0$$

Доказательство: Из теорем (2.1) и (2.2) имели, что

$$0 \leq c(m,n,\lambda) \leq \pi(n) - \nu(n).$$

1) Если $c(m,n,\lambda) > 0$, то теорема тривиальна, поскольку в матрице $M_{m,n}(1)$ все столбцы, кроме первого, содержат как минимум один нулевой остаток.

2) Если $c(m,n,\lambda) = 0$, то и $c^*(m,n,\lambda) = 0$, где $c^*(m,n,\lambda)$ сосчитана только по строкам $1 \leq i \leq m$. Следовательно,

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda; i) - \overline{M}_{m,n}(1; i) = 0.$$

Но это невозможно, поскольку λ и $\lambda + n - 1$ совместно кратны на все простые делители числа n. На самом деле при $n = 3$, $\lambda = 4$, $c(m,n,\lambda) = 0$, но если $\lambda > 4$, то $c^*(m,n,\lambda) \neq 0$. Теорема доказана.

Приведем несколько следствий Теоремы 3.1. Рассмотрим матрицу $M_{m,n}(1)$. Обозначим через $L_m(j)$ количество ненулевых остатков, а через $\nu^*_m(j)$ количество нулевых остатков в j-том столбце матрицы $M_{m,n}(1)$. Легко видеть, что

$$L_m(j) = \pi(n) - \nu^*_m(j), \quad L_m(1) = \pi(n) = m.$$

Обозначим через $\overline{L}_{m,n}(\lambda)$ количество ненулевых остатков всей матрицы $M_{m,n}(\lambda)$. Тогда можно доказать, что

$$\overline{L}_{m,n}(1) - \overline{L}_{m,n}(O_n) = \pi(n) - \nu(n),$$

где O_n - натуральный нуль, $O_n = \prod_{i=1}^{m} p_i$. Легко видеть, что

$$\overline{L}_{m,n}(1) - \overline{L}_{m,n}(\lambda) = \pi(n) - c(m, n, \lambda).$$

Теорема 1.4 *В матрице $M_{m,n}(\lambda)$, где $8 < n < \lambda \leq n^2$, $m = \pi(n)$ имеется не менее $\left[\frac{[\log_2 n]}{2}\right] - 1$ столбцов, в каждом из которых нет нулей в строках $1 < i \leq m = \pi(n)$.*

Доказательство: Рассмотрим подобные матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(1)$, где $8 < n < \lambda \leq n^2$, $m = \pi(n)$. Зачеркнем все те столбцы у матриц $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(1)$, в которых есть хотя бы один нуль в строках $1 < i \leq m = \pi(n)$.

Тогда у матрицы $M_{m,n}(1)$ незачеркнутыми останутся только столбцы с нулем в первой строке и первый столбец, т.е. им соответствуют числа вида 2^x. А таких чисел среди первых n чисел имеется ровно $k_1^* = [\log_2 n] + 1$. Следовательно, у матрицы $M_{m,n}(1)$ зачеркнутыми будут $k_1 = n - [\log_2 n] - 1$ столбцов.

Обозначим через k_2^* количество незачеркнутых столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, а через k_2 - количество зачеркнутых столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$. Очевидно, $k_2 = n - k_2^*$. Если $k_2 \leq k_1$, то $k_2^* \geq k_1^* = [\log_2 n] + 1$ и подавно $k_2^* \geq \left[\frac{[\log_2 n]}{2}\right] - 1$ и теорема выполнена.

Теперь допустим $k_2 > k_1$. Тогда $k_2^* < k_1^*$. Расположим в матрицах $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(\lambda)$ столбцы по максимальной выборке нулей справа налево так, чтобы сперва расположились незачеркнутые, а потом зачеркнутые столбцы. Так как при нечетных n и четных λ количество четных столбцов (соответствующих четным числам) матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ на 1 больше чем количество четных столбцов матрицы $M_{m,n}(1)$ и в матрице $M_{m,n}(\lambda)$ количество столбцов, в которых есть хотя бы один нуль в строках $1 < i \leq m = \pi(n)$ не может быть больше чем $n - \frac{[\log_2 n]}{2} - 1$, сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим.

$$k_2^* \geq \left[\frac{[\log_2 n]}{2}\right] - 1.$$

Тот же результат можно получить и по-другому. Напомним, что согласно (1.4) имеем

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1) = c(m,n,\lambda). \qquad (a)$$

Откуда следует, что

$$\overline{M}^{k_2}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}^{k_1}_{m,n}(1) \geq c^*(m,n,\lambda) + \alpha_1 + 1, \qquad (b)$$

где $c^*(m,n,\lambda)$ сосчитана только по строкам $1 \leq i \leq m$. Где $k_2* = \alpha_1 + \alpha_2$, и α_1 - количество тех столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ в каждом из которых есть только один один 0, и этот 0 стоит в строке $i = 1$, а α_2 - количество пустых (не имеющих нулей) столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$. Здесь обозначено через $\overline{M}^{k}_{m,n}(\lambda)$ количество всех нулевых остатков k столбцов данной матрицы (в том числе и нули в первой строке). Вычитая (b) из (a), получим

$$\alpha_1 - [\log_2 n] \leq -1 - \alpha_1.$$

Следовательно, учитывая, что $c^*(m,n,\lambda) \leq c(m,n,\lambda) - 1$, и возможно, что величина $[\log_2 n]$ являтся нечетным числом при $2 \dagger n, 2|\lambda$ получаем

$$\alpha_1 \leq \left[\frac{[\log_2 n]}{2}\right] - 1.$$

Таким образом

$$k_2^* - \alpha_1 = \alpha_2 \geq \left[\frac{[\log_2 n]}{2}\right] - 1.$$

Теорема 1.4 полностью доказана.

Чтобы доказательства теорем были более ясными, рассмотрим сопряженные матрицы остатков.

1.4 Сопряженные матрицы остатков

Определение 2 *Две матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ называются сопряженными, если они отличаются распределением нулей только в одной строке.*

В частности, можем рассматривать такие сопряженные матрицы, которые отличаются распределением нулей только в первой строке. Например, $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ будут сопряженными матрицами по первой строке, если

$$\overline{\lambda} = \prod_{i=2}^{m} P_i + \lambda, \quad m = \pi(n).$$

Количество нулевых элементов сопряженной матрицы $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ обозначим через $\overline{M}_{m,n}(\overline{\lambda})$.

Определение 3 *Столбцы сопряженных по первой строке матриц которые занимают одни и те же места в матрицах, называем двойниками. Распределение нулей в этих столбцах, кроме первой строки, одинаковые.*

Определение 4 *Столбец называется соответствующим числу λ_j, если элементы этого столбца $a_{i,j}$ образовались при делении данного числа λ_j на простое число P_i и наоборот.*

Теорема 1.5 *Пустой (не содержащий ни одного нуля) столбец матрицы соответствует столбцу сопряженной матрицы, каторый содержит только один нуль, и этот нуль находится в строке $i = 1$, и обратно.*

Доказательство очевидно.

Теорема 1.6 *Количества столбцов сопряженных (только по первой строке) матриц, каждый из которых содержит минимум один нуль в строках $i > 1$, равны между собой.*

Доказательство: если матрица содержит хоть один нуль в строке $i > 1$, и в столбце j, то и сопряженная матрица тоже в этой строке и в том же столбце содержит тот же самый нуль.

1.5 Применение матриц остатков

Для иллюстрации преимущества метода матриц остатков, сначала рассмотрим постулат Бертрана, т.е. докажем неравенство (1.3).

Рассмотрим матрицы $M_{m,n}(1)$, $M_{m,n}(\overline{1})$ и $M_{m,n}(\lambda)$, $M_{m,n}(\overline{\lambda})$, которые попарно сопряжены по первой строке. Согласно пункту 2 можем обозначить

$$c_1(m,n,\overline{\lambda}) = \overline{M}_{m,n}(\overline{\lambda}) - \overline{M}_{m,n}(\overline{1}). \tag{1.6}$$

Пусть $\lambda = n+1$, $n \geq 5$.

Составим объединенные матрицы, столбцы которых являются механическим присоединением столбцов-двойников сопряженных матриц. Таким образом, получим новые матрицы, их обозначим $M_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda})$ и $M_{m^*,n}(1,\overline{1})$ в соответствии с пунктом 2, где $m^* = 2m$, $1 \leq i \leq 2m$.

Связь числа нулей этих матриц следующая:

$$\begin{aligned} \overline{M}_{m,n}(\lambda) + \overline{M}_{m,n}(\overline{\lambda}) &= \overline{M}_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda}), \\ \overline{M}_{m,n}(1) + \overline{M}_{m,n}(\overline{1}) &= \overline{M}_{m^*,n}(1,\overline{1}). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Согласно (1.4) и (1.6)

$$2c^*(m,n,\lambda) = \overline{M}_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}(1,\overline{1}), \tag{1.8}$$

где $c^*(m,n,\lambda)$ рассчитано только по строкам $i > 1$, $i \neq m+1$, так как для строк $i = 1$, $i = m+1$ объединенные матрицы суммарно содержат одинаковое количество (n) нулей и в разности (1.8) уничтожают друг друга.

Пусть символ $\overline{M}^k_{m,n}(\lambda)$ обозначает количество всех нулей k столбцов данной матрицы.

Теорема 1.7 *Для любого натурального $n \geq 2$,*

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \left[\frac{[\log_2 n]+1}{2}\right] - 1,$$

где $[\log_2 n]$ обозначает целую часть от $\log_2 n$.

Доказательство: допустим $\lambda = n+1$, k_2 есть количество тех столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, каждый из которых в строках $i > 1$ содержит минимум один нуль. Ясно, что k_2 равно и количеству таких же столбцов матрицы $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ (см. Определение 4).

Аналогично, количество таких же столбцов для матриц $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(\overline{1})$ обозначим k_1. Тогда как следствие из (1.8) можем написать

$$\overline{M}^{k_2}_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda}) - \overline{M}^{k_1}_{m^*,n}(1,\overline{1}) = 2c^*(m,n,\lambda) + [\log_2 n] + 1 - \alpha_1 - \alpha_2, \tag{1.9}$$

где α_1 – количество тех столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, каждый из которых содержит только один нуль, и этот нуль в строке $i = 1$, α_2 есть количество пустых столбцов этой же матрицы. Так как среди чисел $n+1$, $n+2$,..., $2n$ обязательно есть только одно число вида 2^ν, где ν – целое число, следовательно $\alpha_1 = 1$. Имеем

$$0 \le \alpha_2 = \pi(2n) - \pi(n),$$

так как если столбец матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ по отношению строк $i \ge 1$ пустой, то ему соответствующее число простое. В матрице $M_{m,n}(1)$ только один пустой столбец (ему соответствующее число единица) и $[\log_2 n]$ столбцов, каждый из которых содержит только один нуль и этот нуль в строке $i = 1$, их соответствующие числа следующие: $2, 4, 8, ..., 2^\nu$, где $2^\nu \le n$.

С другой стороны равенство (1.9) можно написать в виде

$$\overline{M}^{k_2}_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}^{k_1}_{m^*,n}(1, \overline{1}) = 2c^*(m, n, \lambda) + k_2 - k_1, \qquad (1.10)$$

так как $\overline{M}^{k}_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$ равно количеству всех нулей k столбцов данной матрицы.

Допустим $k_2 > k_1$ (в противном случае доказательство теоремы очевидно) и оценим $k_2 - k_1$. Каждая из матриц $M_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$ и $M_{m^*,n}(1, \overline{1})$ в строках $i = 1$ и $i = m + 1$ суммарно имеет всего n нулей и $k_1 = n - [\log_2 n] - 1$. Допустим

$$\overline{M}^{k_2}_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}^{k_1}_{m^*,n}(1, \overline{1}) > 2c^*(m, n, \lambda) + \alpha_2 - \alpha_1.$$

Из этого следует, что $k_2 - k_1 > \alpha_2$, но не следует, что $2(\alpha_2 + \alpha_1) < [\log_2 n] + 1$, а подтверждается предположение $k_2 > k_1$. Но тогда невозможно восстановить равенства (1.10), (1.9) и (1.8), так как из $[\log_2 n]$ столбцов обратно занеся α_2 столбцов в разность получим

$$\overline{M}^{k_2}_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}^{k_2}_{m^*,n}(1, \overline{1}) > 2c^*(m, n, \lambda).$$

Последнее невозможно, так как

а) в каждой матрице остались нетронутыми $\alpha_1 + \alpha_2$ столбцов,

б) количество столбцов в каждой матрице равно n,

в) каждая матрица в строках $i = 1$, $i = m + 1$ совместно содержит n нулевых остатков,

г) в каждом столбце каждой матрицы есть $2(\pi(n)-\nu(n))$ элементов (нулевых и ненулевых остатков).
Следовательно, $k_2 - k_1 \leq \alpha_2$. Итак, получили неравенство

$$\overline{M}^{k_2}_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda}) - \overline{M}^{k_1}_{m^*,n}(1,\overline{1}) \leq 2c^*(m,n,\lambda) + \alpha_2 + \alpha_1. \qquad (1.11)$$

К такому же выводу приходим, используя Теорему 1.4, так как матрицы $M_{m,n}(\lambda,\overline{\lambda})$ и $M_{m,n}(1,\overline{1})$ тоже подобные.

Из равенства (1.9) и неравенства (1.11), учитывая четность числа $[\log_2 n]$ следует

$$\alpha_2 \geq \left[\frac{[\log_2 n]+1}{2}\right] - 1.$$

Но так как $\alpha_2 = \pi(2n) - \pi(n)$, получаем

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \left[\frac{[\log_2 n]+1}{2}\right] - 1.$$

Теорема 1.7 доказана.

Замечание 1 *С помощью различных методов по данному вопросу получены* [4] *сильные результаты. Но наша цель применить метод матриц остатков для нерешенных задач. Что касается оценки разности (1.3) с двух сторон, то наш метод дает более сильные результаты чем существующие.*

Теорема 1.8 *Для любого целого* $x > 0$

$$\pi(x^2+x) - \pi(x^2) \geq \left[\frac{1}{2}\log_2 x\right] - 1.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda})$ и $M_{m^*,n}(1,\overline{1})$, где

$$n = x^2, \quad m^* = 2m, \quad m = \pi(n), \quad \lambda = x+1, \quad x \geq 1.$$

Допустим, аналогично теореме 1.4, что k_4 показывает количество столбцов матрицы $M_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda})$, содержащих минимум два нуля в строках $i > 1$, $i \neq m+1$, а k_3 - количество таких же столбцов матрицы $M_{m^*,n}(1,\overline{1})$.

Можем написать

$$\overline{M}^{k_4}_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda}) - \overline{M}^{k_3}_{m^*,n}(1,\overline{1}) = 2c^*(m,n,\lambda) + [\log_2 x] + 1 - \alpha_3 - \alpha_4, \quad (1.12)$$

где $[\log_2 x]+1$ есть количество тех столбцов матрицы $M_{m^*,n}(1,\overline{1})$ каждый из которых содержит только один нуль и этот нуль в строке $i=1$ или в строке $i=m+1$ и эти столбцы не являются общими с матрицей $M_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda})$, т.е. соответствуют числам из промежутка $1,2,...,x$.

Заметим, что $\alpha_3+\alpha_4$ есть количество тех столбцов матрицы $M_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda})$, которые не являются общими с матрицей $M_{m^*,n}(1,\overline{1})$ и содержат только по одному нулю и этот нуль в строке $i=1$ или в строке $i=m+1$. Нетрудно убедиться, что $\alpha_3 \le 1$, так как среди чисел x^2+1, x^2+2,..., x^2+x только одно число может быть вида 2^ν, ν – целое число (как например, при $(\sqrt{7})^2$ и $(\sqrt{7})^2+\sqrt{7}$), а также

$$\alpha_4 = \pi(x^2+x)-\pi(x^2),$$

так как в матрице $M_{m,n}(\lambda)$ эти столбцы пустые (составное число N содержит простой множитель $\le \sqrt{N}$), следовательно эти столбцы должны соответсвовать простым числам.

Заметим, что в матрицах есть и другие столбцы содержащие по одному нулю, но они уничтожаются в разности (1.12), так как они являются общими для обеих матриц.

Отметим, что столбцы под номерами $x+1, x+2, ..., x^2$ для обеих матриц общие и в разности (1.12) уничтожаются, а сопоставляются матрицы $M_{m^*,x}(x^2+1,\overline{x^2+1})$ и $M_{m^*,x}(1,\overline{1})$, где $m^*=2m$, $m=\pi(n)$

Аналогично теореме 1.7, учитывая что для целых x, среди чисел $1,2,...,x^2$ имеется $2[\log_2 x]$ чисел вида $2^\nu \le x^2$, получаем

$$\overline{M}^{k_4}_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda}) - \overline{M}^{k_3}_{m^*,n}(1,\overline{1}) \le 2c^*(m,n,\lambda) + \left[\frac{\log_2 x}{2}\right] + 2. \qquad (1.13)$$

Вычитая (1.13) из (1.12) получим

$$\alpha_4 \ge \left[\frac{1}{2}\log_2 x\right] - 1, \quad n = x^2.$$

Следовательно,

$$\pi(x^2+x)-\pi(x^2) \ge \left[\frac{1}{2}\log_2 x\right] - 1.$$

Таким образом теорема 1.8 доказана.

Отметим, что знак равенства в (1.13) имеет место только при $\nu(x) = \nu(x+1) = 1$.

Следствие 2 Среди любых $2n$ *последовательных чисел из совокупности целых чисел* $n+1$, $n+2$,..., $(n+1)^2$ *имеются самое меньшее* $\left[\frac{1}{2}\log_2 n\right]-1$ *простых чисел.*

Доказательство следствия 2 тривиально следует из теорем 1.4, 1.7 и 1.8.

Список литературы

[1] Бухштаб А.А. Теория чисел. М. 1966.

[2] Гриценко С.А. Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха - Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида // УМН 1988 т. 43 No4 , С. 203 - 204.

[3] Чанга М.Е. Простые числа в специальных промежутках и аддитивные задачи с такими числами // Математические заметки. 2003. Т. 73 No3 С. 423 - 436.

[4] Прахар К. Распределение простых чисел М.: Наука, 1967.

[5] Мкртумян Э.Л. Матрицы остатков // Вестник ЕрГосУнт-а. 1995. No2 С. 107-108.

2 Об оценке количеств простых чисел в определенных промежутках

Настоящая статья посвящена иследованию некоторых задач распределения простых чисел. Исследование проводится методом матриц остатков, который разработан автором.

Обозначим через $\pi(n)$ количество простых чисел, не превосхадящих целое число n. Об оценке разности

$$\pi(2n) - \pi(n), \tag{2.1}$$

известно, что [1]

$$\pi(2n) - \pi(n) > \frac{3}{5}\frac{n}{\ln n}, \quad n > 21. \tag{2.2}$$

Пруст получил наилучшую (из существующих) оценку разности (2.1) снизу:

$$\pi(2n) - \pi(n) > \frac{3}{5}\pi(n), \quad n \geq 40. \tag{2.3}$$

Оценку разности (2.1) сверху получил Ландау [2]:

$$\pi(2n) - \pi(n) \leq \pi(n). \tag{2.4}$$

В настоящей статье с помощью метода матриц остатков [3] улучшены эти оценки.

2.1 Сопряженные матрицы остатков

Определение 5 *Две матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ называются сопряженными, если они отличаются распределением нулей только в одной строке.*

В частности, можем рассматривать такие сопряженные матрицы, которые отличаются распределением нулей только в первой строке. Например, $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ будут сопряженными матрицами по первой строке, если

$$\overline{\lambda} = \prod_{i=2}^{m} P_i + \lambda, \quad m = \pi(n).$$

Количество нулевых элементов сопряженной матрицы $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ обозначим через $\overline{M}_{m,n}(\overline{\lambda})$.

Определение 6 *Столбцы сопряженных по первой строке матриц которые занимают одни и те же места в матрицах, называем двойниками. Распределение нулей в этих столбцах, кроме первой строки, одинаковые.*

Определение 7 *Столбец называется соответствующим числу λ_j, если элементы этого столбца $a_{i,j}$ образовались при делении данного числа λ_j на простое число P_i и наоборот.*

Теорема 2.1 *Пустой (не содержащий ни одного нуля) столбец матрицы соответствует столбцу сопряженной матрицы, каторый содержит только один нуль, и этот нуль находится в строке $i = 1$, и обратно.*

Доказательство очевидно.

Теорема 2.2 *Количество столбцов сопряженных (только по первой строке) матриц, каждый из которых содержит минимум один нуль в строках $i > 1$, равны между собой.*

Доказательство: если матрица содержит хоть один нуль в строке $i > 1$, и в столбце j, то и сопряженная матрица тоже в этой строке и в том же столбце содержит тот же самый нуль.

2.2 Применение матриц остатков

Рассмотрим матрицы $M_{m,n}(1)$, $M_{m,n}(\overline{1})$ и $M_{m,n}(\lambda)$, $M_{m,n}(\overline{\lambda})$, которые попарно сопряжены по первой строке. Согласно пункту 2.2 можем обозначить

$$c_1(m, n, \overline{\lambda}) = \overline{M}_{m,n}(\overline{\lambda}) - \overline{M}_{m,n}(\overline{1}). \tag{2.5}$$

Пусть $\lambda = n + 1$, $n \geq 1$.

Составим объединенные матрицы, столбцы которых являются механическим присоединением столбцов-двойников сопряженных матриц. Таким образом, получим новые матрицы, их обозначим $M_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$ и $M_{m^*,n}(1, \overline{1})$ в соответствии с пунктом 2.2, где $m^* = 2m$, $1 \leq i \leq 2m$.

Связь числа нулей этих матриц следующая:

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda) + \overline{M}_{m,n}(\overline{\lambda}) = \overline{M}_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda}),$$

$$\overline{M}_{m,n}(1) + \overline{M}_{m,n}(\overline{1}) = \overline{M}_{m^*,n}(1, \overline{1}), \tag{2.6}$$

или

$$2c^*(m, n, \lambda) = \overline{M}_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}(1, \overline{1}), \tag{2.7}$$

где $c^*(m, n, \lambda)$ рассчитано только по строкам $i > 1$, $i \neq m + 1$, так как для строк $i = 1$, $i = m+1$ объединенные матрицы суммарно содержат одинаковое количество (n) нулей и в разности (4.3) уничтожают друг друга.

Пусть символ $\overline{M}^k_{m,n}(\lambda)$ обозначает количество всех нулей k столбцов данной матрицы. Допустим $\lambda = n + 1$, k_2 есть количество тех столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, каждый из которых в строках $i > 1$ содержит минимум один нуль. Ясно, что k_2 равно и количеству таких же столбцов матрицы $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ (см. теорему 3.2).

Аналогично, количество таких же столбцов для матриц $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(\overline{1})$ обозначим k_1. Тогда как следствие из (4.3) можем написать

$$\overline{M}^{k_2}_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}^{k_1}_{m^*,n}(1, \overline{1}) = 2c^*(m, n, \lambda) + [\log_2 n] + 1 - \alpha_1 - \alpha_2, \tag{2.8}$$

где α_1 – количество тех столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, каждый из которых содержит только один нуль, α_2 есть количество пустых столбцов этой же матрицы. Так как среди чисел $n + 1$, $n + 2$,..., $2n$ обязательно есть только одно число вида 2^ν, где ν – целое число, следовательно $\alpha_1 = 1$. Имеем

$$0 \leq \alpha_2 = \pi(2n) - \pi(n),$$

так как если столбец матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ по отношению строк $i \geq 1$ пустой, то ему соответствующее число простое. В матрице $M_{m,n}(1)$ только один пустой столбец (ему соответствующее число единица) и $[\log_2 n]$ столбцов, каждый из которых содержит только один нуль и этот нуль в строке $i = 1$, их соответствующие числа следующие: $2, 4, 8, ..., 2^\nu$, где $2^\nu \leq n$.

С другой стороны равенство (2.8) можно написать в виде

$$\overline{M}^{k_2}_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}^{k_1}_{m^*,n}(1, \overline{1}) = 2c^*(m, n, \lambda) + k_2 - k_1, \tag{2.9}$$

так как $\overline{M}^k_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$ равно количеству всех нулей k столбцов данной матрицы.

Теорема 2.3 *Для любого целого* $n > 0$

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \frac{\pi(n)}{2} - \left[\frac{1}{2}[\log_2 n]\right] - 1.$$

Доказательство. Равенство (2.9) показывает, что если из матриц выбрать k_1 и k_2 столбцов, то

$$\overline{M}^{k_2}_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}^{k_1}_{m^*,n}(1, \overline{1}) \leq$$

$$\leq 2c^*(m, n, \lambda) + \left(n - \frac{\pi(n)}{2} + 2 + \left[\frac{1}{2}[\log_2 n]\right]\right) - (n - [\log_2 n] - 1)\,. \tag{2.10}$$

Это следует из того, что в матрице $M_{m^*,n}(1, \overline{1})$ столбцы соответствующие числам 1 и $[\log_2 n]$ имеют только по одному нулю, а в матрице $M_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$ таких столбцов ровно $\pi(2n) - \pi(n) + 1$. Остальные столбцы имеют минимум два нуля. Сопоставление матриц по максимальной выборке дает (2.10). Вычитая (2.10) из (2.8) получим

$$\alpha_2 = \pi(2n) - \pi(n) \geq \frac{\pi(n)}{2} - \left[\frac{1}{2}[\log_2 n]\right] - 1.$$

Таким образом теорема 2.3 доказана.

2.3 Сопряженные матрицы остатков по второй строке и их применения

Определение 8 *Матрицы* $M_{m,n}(\lambda)$, $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ *и* $M_{m,n}(\widetilde{\lambda})$ *называются сопряженными по второй строке, если они отличаются распределением нулей только по второй строке.*

Например, $M_{m,n}(1)$, $M_{m,n}(\overline{1})$ и $M_{m,n}(\widetilde{1})$ будут сопряженными матрицами по второй строке, если

$$\overline{1} = 1 + 2\prod_{i=3}^{m} P_i, \quad m = \pi(n),$$

$$\widetilde{1} = 1 + 4\prod_{i=3}^{m} P_i.$$

Употребляя обозначения аналогичные, как в случае сопряженных матриц по первой строке, для объединенных матриц сопряженных по второй строке, получим

$$\overline{M}_{m^*,n}(\overline{\overline{\lambda}}) - \overline{M}_{m^*,n}(\overline{\overline{1}}) = 3c^*(m,n,\lambda), \tag{2.11}$$

где

$$\overline{M}_{m^*,n}(\overline{\overline{\lambda}}) = \overline{M}_{m,n}(\lambda) + \overline{M}_{m,n}(\overline{\lambda}) + \overline{M}_{m^*,n}(\tilde{\lambda}).$$

Здесь $m^* = 3m$, а $c^*(m,n,\lambda)$ рассчитано только по строкам $i \neq 2$.

Теорема 2.4 *Для любого натурального n*

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \frac{3}{5}\left(\pi(n) + [\log_3 n] - 1\right),$$

где $[\log_3 n]$ обозначает целую часть от $\log_3 n$.

Доказательство: Пусть $\lambda = n + 1$ и k_1 есть количество тех столбцов матрицы $M_{m,n}(1)$, которые по отношению $i \neq 2$ строк не пусты. Следовательно,

$$k_1 = n - [\log_3 n] - 1.$$

Пусть k_2 – количество тех столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, которые не пусты, и по отношению всех строк кроме первой содержат хоть один нуль. Следовательно,

$$k_2 \leq n - \left(\pi(n) - 1 - \frac{2}{3}\alpha\right), \quad \alpha = \pi(2n) - \pi(n).$$

Тогда из (2.11) следует

$$\overline{M}^{k_2}_{m^*,n}(\overline{\overline{\lambda}}) - \overline{M}^{k_1}_{m^*,n}(\overline{\overline{1}}) = 3c^*(m,n,\lambda) + [\log_3 n] + 1 - \alpha. \tag{2.12}$$

Из определения объединенных матриц, сопряженных по второй строке, нетрудно получить

$$\overline{M}^{k_2}_{m^*,n}(\overline{\overline{\lambda}}) - \overline{M}^{k_1}_{m^*,n}(\overline{\overline{1}}) \leq 3c^*(m,n,\lambda) + n + 1 - \pi(n) + \frac{2}{3}\alpha - (n-1) =$$

$$= 3c^*(m,n,\lambda) - \pi(n) + \frac{2}{3}\alpha + 2. \tag{2.13}$$

Из (2.12) вычитая (2.13), получим

$$\alpha = \pi(2n) - \pi(n) \geq \frac{3}{5}\big(\pi(n) + [\log_3 n] - 1\big).$$

Таким образом теорема 2.4 доказана.

Список литературы

[1] Janos Pintz, “Landau’s problems on primes”, J. Theor, Nombres, Bordeaux, vol. 21, no. 2, pp. 357-404, 2009.

[2] Чанга М.Е. Простые числа в специальных промежутках и аддитивные задачи с такими числами // Математические заметки. 2003. Т. 73 No3 С. 423 - 436.

3 О некоторых проблемах простых чисел

3.1 Введение

a) Гипотеза Лежандра была сформулирована Эдмундом Ландау на Международном Математическом конгрессе в 1912 году и звучит так [2]: *верно ли, что для любого натурального n в промежутке от n^2 до $(n+1)^2$ лежит хотя бы одно простое число?*

Согласно статье [2], по состоянию на 2009 год гипотеза Лежандра все еще не доказана. Но в [2] из следствия Теоремы 1.8 фактически вытекает, что

$$\pi((n+1)^2) - \pi(n^2) \geq [\log_2 n] - 1, \tag{3.1}$$

где $\pi(n)$ – количество простых чисел, не превосхадящих целое число n, $[\log_2 n]$ означает целую часть.

В настоящей статье доказывается более сильное утверждение

$$\pi((n+1)^2) - \pi(n^2) \geq \frac{1}{3}\left(\pi(2n) - \pi(n) + [\log_3 n]\right) - 1. \tag{3.2}$$

Неравенство (3.2) сильнее, чем (3.1) при больших n.

b) Представляет интерес и оценка верхней границы. В настоящей статье доказывается, что

$$\pi((n+1)^2) - \pi(n^2) \leq \pi(n) + 1.$$

c) Принято, что если $x, y \geq 2$ – натуральные числа, то

$$\pi(x) + \pi(y) \geq \pi(x+y). \tag{3.3}$$

Это неравенство было известно древним китайцам, хотя оно ждет пока своего строгого доказательства. В [3] указано, что неравенство (3.3) верно при $x = y$. В настоящей статье решается эта задача полностью.

3.2 Теоремы

Теорема 3.1 *Для любого натурального x,*

$$\pi((x+1)^2) - \pi(x^2) \geq [\log_2 x] - 1.$$

Доказательство. Составим объединенные матрицы остатков, столбцы которых являются механическим присоединением столбцов-двойников сопряженных матриц. Таким образом, получим новые матрицы, их обозначим $M_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda})$ и $M_{m^*,n}(1,\overline{1})$, где $n=x^2$, $m^*=\pi(x^2)$, $\lambda=2x+1$.

Имеем (см. [3])

$$\overline{M}^{k_2}_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda})-\overline{M}^{k_1}_{m^*,n}(1,\overline{1})=2c^*(m,n,\lambda)+[\log_2 x]+1-\alpha, \qquad (3.4)$$

$$\alpha=\pi(x+1)^2-\pi(x^2),$$

где k_1 – количество тех столбцов матрицы $M_{m^*,n}(1,\overline{1})$, каждый из которых содержит минимум 2 нуля в строках $i\neq 1$, $i\neq m+1$, $i\neq m+2$, а k_2 – количество таких же столбцов матрицы $M_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda})$. Нетрудно получить, что

$$\overline{M}^{k_2}_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda})-\overline{M}^{k_1}_{m^*,n}(1,\overline{1})\leq 2c^*(m,n,\lambda)+2. \qquad (3.5)$$

Заметим, что символ $\overline{M}^{k}_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda})$ показывает количество всех нулей k столбцов, а столбцы, соответствующие числам $2x+1, 2x+2, ..., x^2$ общие и в разности уничтожаются. Поэтому сопоставление матриц $M_{m^*,n}(1,\overline{1})$ и $M_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda})$, где $m=\pi(n)$, $n=x^2$, приводит к сопоставлению матриц $M_{m^*,2x}(1,\overline{1})$ и $M_{m^*,2x}(x^2+1,\overline{x^2+1})$, где $m^*=\pi(n)$.

Вычитая (3.5) из (3.4) получим

$$\alpha\geq[\log_2 x]-1.$$

Заметим, что α есть количество простых чисел между $(x+1)^2$ и x^2, что и доказывает Теорему 3.1.

Теорема 3.2 *Для любого натурального x,*

$$\pi((x+1)^2)-\pi(x^2)\geq\frac{1}{6}\left(\pi(2x)-\pi(x)+[\log_3 x]\right)-1.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу остатков, у которой исключены строки P_k, $x<P_k<2x$ (такую матрицу называем суженной). Тогда в суженной матрице $M_{m,n}(1)$, где $n=x^2$, $m=\pi(x^2)-\pi(2x)+\pi(x)$, появляются пустые столбцы, номера которых соответствуют числам P_k, $\lambda=2x+1$.

Рассмотрим также сопряженную суженную матрицу остатков по второй строке. Из результатов §2 имеем

$$\overline{M}^{k_4}_{m^*,n}(\overline{\overline{\lambda}})-\overline{M}^{k_3}_{m^*,n}(\overline{\overline{1}}) = 3c^*(m,n,\lambda)+\pi(2x)-\pi(x)+[\log_3 x]+1-\alpha. \quad (3.6)$$

где k_4 есть количество тех столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, каждый из которых содержит нули в строках $i \neq k$, разность $c^*(m,n,\lambda)$ не считается по строкам $i \neq 2$, $i \neq k$. Аналогично, количество таких же столбцов для матрицы $M_{m,n}(1)$ обозначим k_3. Здесь тоже столбцы соответствующие числам $2x+1, 2x+2, ..., x^2$ общие и в разности уничтожаются. Так как левая часть (3.6) из себя представляет разность, то сужение матриц не влияет на количество простых чисел между x^2 и $(x+1)^2$), откуда и следует (3.6).

Из теории матриц остатков известно, что

$$\overline{M}^{k_4}_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda})-\overline{M}^{k_3}_{m^*,n}(1,\overline{1}) \leq 3c^*(m,n,\lambda)+2+\frac{2}{3}\Big(\pi(2n)-\pi(n)+[\log_3 n]\Big)+\alpha, \quad (3.7)$$

где $n = x^2$, $m = \pi(x^2) - \pi(2x) + \pi(x)$. Вычитая (3.7) из (3.6), получим

$$\alpha \geq \frac{1}{6}\left(\pi(2x) - \pi(x) + [\log_3 x]\right) - 1.$$

Но так как $\alpha = \pi((x+1)^2) - \pi(x^2)$, следовательно

$$\pi((x+1)^2) - \pi(x^2) \geq \frac{1}{6}\left(\pi(2x) - \pi(x) + [\log_3 x]\right) - 1.$$

Теорема 3.2 доказана.

Теорема 3.3 *Для любого натурального x,*

$$\pi((x+1)^2) - \pi(x^2) \leq \left[\frac{\pi(x)+1}{2}\right].$$

Доказательство. Рассмотрим сопряженные по первой строке матрицы остатков, для которых известно, что

$$\overline{M}_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}(1,\overline{1}) = 2c^*(m,n,\lambda),$$

где $n = x^2$, $m^* = \pi(x^2)$, $\lambda = 2x+1$. Отсюда нетрудно получить

$$\overline{M}^{d_2}_{m^*,n}(\lambda,\overline{\lambda}) - \overline{M}^{d_1}_{m^*,n}(1,\overline{1}) = 2c^*(m,n,\lambda) + 1 - \alpha, \quad (3.8)$$

где d_2 есть количество тех столбцов матрицы $M_{m,2x}(x^2+1)$, каждый из которых содержит нули, d_1 – количество таких же столбцов для матрицы $M_{m,2x}(1)$. Таким образом, $d_1 = 2x - \pi(2x) + \pi(x)$, $d_2 = 2x - k_2$ и $\alpha = \pi((x+1)^2) - \pi(x^2)$. Отсюда следует неравенство

$$\overline{M}^{d_2}_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}^{d_1}_{m^*,n}(1, \overline{1}) \geq 2c^*(m,n,\lambda) - \pi(x) + \alpha. \qquad (3.9)$$

Вычитая (3.9) из (3.8), получим

$$\alpha = \pi((x+1)^2) - \pi(x^2) \leq \left[\frac{\pi(x)+1}{2}\right].$$

Теорема 3.3 доказана.

Теорема 3.4 *Если $x, y \geq 2$ – натуральные числа, то*

$$\pi(x) + \pi(y) \geq \pi(x+y). \qquad (3.10)$$

Доказательство. Не умаляя общности, можно принять, что $y > x$, так как при $x = y$ теорема доказана в [2]. Рассмотрим сопряженные по первой строке матрицы остатков, для которых известно, что

$$\overline{M}_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}(1, \overline{1}) = 2c^*(m,n,\lambda).$$

Допустим $n = y$, $\lambda = x+1$, $m = \pi(y)$. Тогда

$$\overline{M}^{k_2}_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}^{k_1}_{m^*,n}(1, \overline{1}) = 2c^*(m,n,\lambda) + [\log_2 x] + 1 - \alpha, \qquad (3.11)$$

где k_1, k_2 – количество тех столбцов, которые имеют нули в строках $i \neq 1$, $i \neq m+1$. Так как эти матрицы имеют общие столбцы, и нули этих общих столбцов при вычитании уничтожаются, и исчезают столбцы, соответствующие числам $y - x$, следовательно, $\alpha = \pi(x+y) - \pi(y)$

$$\overline{M}^{k_2}_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}^{k_1}_{m^*,n}(1, \overline{1}) \geq 2c^*(m,n,\lambda) + \frac{3}{2}[\log_2 x] - \pi(x). \qquad (3.12)$$

Вычитая (3.12) из (3.11), получим

$$\alpha = \pi(x+y) - \pi(y) \leq \pi(x) - \left[\frac{1}{2}\log_2 x\right] + 1.$$

Следовательно,

$$\pi(x) + \pi(y) \geq \pi(x+y) + \left[\frac{1}{2}\log_2 x\right] - 1.$$

Теорема 3.4 доказана.

Список литературы

[1] Janos Pintz, “Landau’s problems on primes”, J. Theor, Nombres, Bordeaux, vol. 21, no. 2, pp. 357-404, 2009.

[2] E. L. Mkrtumyan, “On some Problems of Distribution of Prime Numbers”,

[3] Прахар К. Распределение простых чисел М.: Наука, 1967.

[4] Чанга М.Е. Простые числа в специальных промежутках и аддитивные задачи с такими числами // Математические заметки. 2003. Т. 73 No3 С. 423 - 436.

4 О простых и взаимнопростых числах в специальных промежутках, I

В статье иследуются последовательности натуральных чисел, содержащие числа, взаимно простые со всеми числами меньшими заданного числа, зависящего от длины последовательности. Исследование проводится методом матриц остатков.

4.1 Введение

Обозначим через $\pi(n)$ количество простых чисел, не превосхадящих целое число n. В настоящей статье доказано неравенство

$$\pi(n) \leq \pi(3n) - \pi(n) \leq \pi(n) + [\log_2 n] + 1, \tag{4.1}$$

и теорема о том, что среди любых последовательных $6n$ натуральных чисел есть хотя бы одно число, которое взаимно простое со всеми числами меньшими или равными n.

Этот вопрос интересовал многих математиков и в дальнейшем стал и проблематичным. Самые интересные работы по этой проблематике у Ранкина. Отметим, что и Ранкину не удалось [1] решить эту задачу [2], [3].

4.2 Сопряженные матрицы остатков

Определение 9 *Две матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ называются сопряженными, если они отличаются распределением нулей только в одной строке.*

В частности, можем рассматривать такие сопряженные матрицы, которые отличаются распределением нулей только в первой строке.

Теорема 4.1 *Матрицы остатков $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ будут сопряженными матрицами по первой строке, если*

$$\overline{\lambda} = \prod_{i=2}^{m} P_i + \lambda, \quad m = \pi(n). \tag{4.2}$$

Доказательство: Из определения матрицы остатков следует, что в $i-$той строке элементы повторяются с периодом P_i. Отсюда следует, что $i-$тые строки матриц $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ совпадают тогда и только тогда, когда разность $\lambda - \overline{\lambda}$ кратна простому числу P_i. Следовательно матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ совпадают тогда и только тогда, когда разность $\lambda - \overline{\lambda}$ кратна произведению простых чисел $\prod_{i=1}^{m} P_i$. Так как число $\prod_{i=2}^{m} P_i$ всегда нечетное, то числа λ и $\overline{\lambda}$ имеют разную четность. Следовательно, для чисел λ и $\overline{\lambda}$ связанных соотношением (5.2) все строки (кроме первой) матриц $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ совпадают, т.е. они сопряжены по первой строке. Теорема доказана.

Например, для $\lambda = 1$, $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$ матрица $M_{4,8}(1)$ имеет вид

$$M_{4,8}(1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для $\lambda = 1$ имеем $\overline{\lambda} = 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 106$. Сопряженная матрица $M_{4,8}(106)$ имеет вид

$$M_{4,8}(106) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 106 & 107 & 108 & 109 & 110 & 111 & 112 & 113 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как видим, все строки (кроме первой) матриц $M_{4,8}(1)$ и $M_{4,8}(106)$ совпадают.

Количество нулевых элементов сопряженной матрицы $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ обозначим через $\overline{M}_{m,n}(\overline{\lambda})$.

Определение 10 *Столбец называется соответствующим числу λ_j, если элементы этого столбца $a_{i,j}$ образовались при делении данного числа λ_j на простое число P_i и наоборот.*

Теорема 4.2 *Пустой (не содержащий ни одного нуля) столбец матрицы остатков соответствует числу λ_j, являющемуся взаимнопростым по отношению ко всем числам $\leq n$, и соответствует столбцу сопряженной матрицы, который содержит только один нуль, и этот нуль находится в строке $i = 1$, и обратно.*

Доказательство очевидно, см. пример. В нашем примере матрицы $M_{4,8}(106)$ второй, четвертый и восьмой столбец соответствуют простым числам 107, 109, 113. В примере же матрицы $M_{4,8}(1)$ второй, четвертый и восьмой столбец содержат только один нуль, и этот нуль находится в строке $i = 1$.

Теорема 4.3 *Количества столбцов сопряженных (только по первой строке) матриц, каждый из которых содержит минимум один нуль в строках $i > 1$, равны между собой.*

Доказательство: если матрица содержит хоть один нуль в строке $i > 1$, и в столбце j, то и сопряженная матрица тоже в этой строке и в том же столбце содержит тот же самый нуль.

4.3 Матрицы остатков с шагом 2

Определение 11 *Матрицей остатков с шагом h называем матрицу, у которой $\lambda_j = \lambda + (j-1)h$. Обозначаем ее через $N_{m,n}(h|\lambda)$.*

Ниже будем рассматривать матрицы остатков $N_{m,n}(2|\lambda)$ с шагом 2. Они содержат $m = \pi(n)$ строк и n столбцов. При этом элемент $a_{i,j}$ матрицы $N_{m,n}(2|\lambda)$ равен остатку от деления числа $\lambda_j = \lambda + 2j - 2$ на P_i, P_i – i-тое простое число. Если число λ четное, то матрицу остатков $N_{m,n}(2|\lambda)$ называем четной. Отметим, что как и для обычной матрицы остатков $M_{m,n}(\lambda)$, у четной матрицы остатков $N_{m,n}(2|\lambda)$ первый столбец соответствует числу $\lambda_1 = \lambda$. Например, при $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 2$ матрица $N_{m,n}(2|\lambda)$ имеет вид

$$N_{4,8}(2|2) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

а при $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 0$ матрица $N_{m,n}(2|\lambda)$ имеет вид

$$N_{4,8}(2|0) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Все свойства и обозначения матриц остатков можно распространить и на четные матрицы остатков, только надо учесть, что первая строка ($P_1 = 2$) содержит лишь нули. Следовательно,

$$\overline{N}_{m,n}(2|0) - \overline{N}_{m,n}(2|2) = \pi(n) - \nu(2n), \quad m = \pi(n), \tag{4.3}$$

где $\overline{N}_{m,n}(2|\lambda)$ – количество нулевых элементов (нулей) матрицы $N_{m,n}(2|\lambda)$, $\nu(2n)$ – количество различных простых делителей числа $2n$.

Обозначим

$$G(m, n, \lambda) = \overline{N}_{m,n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,n}(2|2). \tag{4.4}$$

Заметим, что $G(m, n, \lambda)$ зависит только от строк $i > 1$, так как первые строки этих матриц содержат одинаковое количество (n) нулей и в разности (4.4) они уничтожаются. Следовательно,

$$0 \le G(m, n, \lambda) \le \pi(n) - 1.$$

Определение 12 *Матрицу остатков $N_{m,n}(2|\lambda)$ с шагом 2 называем четной, если число λ (а значит и все числа $\lambda_j = \lambda + 2j$) являются четными.*

Определение 13 *Матрицу остатков $N_{m,n}(2\dagger\lambda)$ с шагом 2 называем нечетной, если число λ (а значит и все числа $\lambda_j = \lambda + 2j$) являются нечетными*

Отметим, что у нечетной матрицы остатков первый столбец соответствует числу $\lambda_1 = \lambda$, а первая строка состоит из n единиц.

Например, при $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 1$ матрица $N_{m,n}(2\dagger 1)$ имеет вид

$$N_{m,n}(2\dagger 1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 0 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

4.4 Применение матриц остатков с шагом 2

Теорема 4.4 *Для любого целого $n > 0$*

$$\pi(n) \le \pi(3n) - \pi(n) \le \pi(n) + [\log_2 n] + 1. \tag{4.5}$$

Доказательство. Рассмотрим нечетное число λ связаное с n соотношением

$$\lambda = \begin{cases} n+1, & \text{если } n \text{ четное,} \\ n, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases} \tag{4.6}$$

Отметим, что числа λ_j четной матрицы $N_{m,n}(2|2)$ состоят из чисел $2, 4, 6, ..., 2n$, а у нечетной матрицы $N_{m,n}(2\dagger\lambda)$ состоят из n нечетных чисел начиная с λ. Рассмотрим четное число

$$\overline{\lambda} = \prod_{i=2}^{m} P_i + \lambda, \tag{4.7}$$

где $m = \pi(n)$. Если выполнено (4.7), то четная матрица $N_{m,n}(2|\overline{\lambda})$, будет сопряжена с нечетной матрицей $N_{m,n}(2\dagger\lambda)$. Имеем (см. (4.4))

$$G(m,n,\lambda) = \overline{N}_{m,n}(2|\overline{\lambda}) - \overline{N}_{m,n}(2|2).$$

Назовем пустым столбец, не содержащий нулей в строках $i > 1$. Пусть k есть количество тех столбцов четной матрицы $N_{m,n}(2|\overline{\lambda})$, каждый из которых в строках $i > 1$ содержит минимум один нуль, а α есть количество пустых столбцов нечетной матрицы $N_{m,n}(2\dagger\lambda)$. Нетрудно заметить, что $\alpha = n - k$, и

$$\overline{N}^{k}_{m,n}(2|\overline{\lambda}) - \overline{N}_{m,n}(2|2) = G(m,n,\lambda) - \alpha, \tag{4.8}$$

где $\overline{N}^{k}_{m,n}(2|\overline{\lambda})$ есть количество всех нулей (включая и нули первой строки) k столбцов четной матрицы $N_{m,n}(2|\overline{\lambda})$.

Так как пустому столбцу соответствует число λ_j, являющееся взаимнопростым по отношению ко всем числам $\leq n$, то имеем

$$\alpha = \pi(3n) - \pi(n). \tag{4.9}$$

В матрице $N_{m,n}(2|2)$ есть пустые столбцы, их количество равно $[\log_2 n]+1$. Кроме того матрица $N_{m,n}(2|2)$ имеет больше столбцов, содержащих толко один нуль в строках $i > 1$, чем матрица $N_{m,n}(2|\overline{\lambda})$. Следовательно, учитывая (4.9), получим

$$G(m,n,\lambda)-\pi(n)-[\log_2 n]-1 \leq \overline{N}^{k}_{m,n}(2|\overline{\lambda})-\overline{N}_{m,n}(2|2) \leq G(m,n,\lambda)-\pi(n). \tag{4.10}$$

Из (4.10) и (4.8) получим

$$\pi(n) \leq \pi(3n) - \pi(n) \leq \pi(n) + [\log_2 n] + 1.$$

Теорема 4.4 доказана.

Теорема 4.5 *Для любого целого $x > 0$ среди любых последовательных+ $6x$ натуральных чисел есть хотя бы одно число, которое взаимно простое со всеми числами $\leq x$.*

Доказательство. Допустим заданы $3x$ последовательных натуральных четных чисел. Составим матрицу $N_{m,n}(2|\lambda)$, где $\lambda > 6x$ – произвольное четное число, $m = \pi(x)$, $n = 3x$. Составим матрицу $N_{m,n}(2|2)$ состоящую из чисел $2, 4, 6, ..., 6x$. Сопоставим эти матрицы по количеству содержащихся нулей, т.е. рассмотрим следующие соотношения

$$\overline{N}_{m,n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,n}(2|2) = G(m, n, \lambda), \tag{4.11}$$

или

$$\overline{N}^k_{m,n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,n}(2|2) = G(m, n, \lambda) - \alpha, \tag{4.12}$$

где k есть количество тех столбцов матрицы $N_{m,n}(2|\lambda)$, каждый из которых в строках $i > 1$ содержит минимум один нуль (первая строка не фигурирует, так как она состоит только из нулей), α есть количество тех столбцов матрицы $N_{m,n}(2|\lambda)$, каждый из которых содержит только один нуль и этот нуль в строке $i = 1$.

Отметим, что $\overline{N}^k_{m,n}(2|\lambda)$ есть количество всех нулей (включая и нули первой строки) k столбцов матрицы $N_{m,n}(2|\lambda)$. Если даже число x содержит только простой делитель 3 (про 2 уже не говорим, так как λ – четное число), то все равно строка $i = 2$, $P_2 = 3$ не влияет на разность нулей в матрицах, т.е. не влияет на $G(m, n, \lambda)$. Так как

$$0 \leq G(m, n, \lambda) \leq \pi(x) - 1, \tag{4.13}$$

то получаем

$$\overline{N}^k_{m,n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,n}(2|2) \leq G(m, n, \lambda) - 1. \tag{4.14}$$

Из (4.12) и (4.14) получим $\alpha \geq 1$. Но по определению α есть количество чисел, начиная с λ, каждый из которых не содержит ни одного

простого нечетного множителя $\leq x$. Следовательно, среди любых последовательных $3x$ четных чисел есть хотя бы одно число, которое не содержит ни одного простого нечетного делителя $\leq x$.

На языке сопряженных матриц это означает, что среди любых последовательных $3x$ натуральных нечетных чисел есть хотя бы одно число, которое взаимно простое со всеми числами $\leq x$. Но $3x$ нечетных числа соседствуют с $3x$ четными числами. Следовательно, среди любых последовательных $6x$ натуральных чисел есть хотя бы одно число, которое взаимно простое со всеми числами $\leq x$. Таким образом теорема 4.5 доказана.

Примечание. При увеличении $\nu(x)$ усиливается неравенство (4.14), а значит и усиливается Теорема 4.5.

Список литературы

[1] Прахар К. Распределение простых чисел М.: Наука, 1967.

[2] Rankin R.A. "The difference between consecutive prime numbers, I", London Math. Soc. 13 (1938), 242-247.

[3] Rankin R.A. "The difference between consecutive prime numbers, II", Proc. Cambridge Phil. Soc. 36 (1990), 255-256.

[4] Мкртумян Э.Л. О некоторых задачах распределения простых чисел, глава 1 данного сборника.

5 О простых и взаимнопростых числах в специальных промежутках, II

В статье иследуются последовательности натуральных чисел, содержащие числа, взаимно простые со всеми числами меньшими заданного числа, зависящего от длины последовательности. С помощью матриц остатков получена оценка верхней границы функции $\rho^*(x)$.

5.1 Введение

В статье [1] функция $\rho^*(x)$ определена следующим образом:

$$\rho^*(x) = \max_y N(x, y),$$

где $N(x, y)$ – количество натуральных чисел в интервале $(y, y + x)$, которые взаимно просты со всеми числами меньшими или равными x. В [1] получено неравенство

$$\rho^*(x) - \pi(x) \geq (\log 2 - \varepsilon)\frac{x}{(\log x)^2},$$

где $\pi(x)$ обозначает количество простых чисел, не превосходящих целое число x. Из этого неравенства следует

$$\lim_{x\to\infty}(\rho^*(x) - \pi(x)) = +\infty.$$

Отметим, что [1] – наилучшее исследование функции $\rho^*(x)$. Однако остается задача оценки функции $\rho^*(x)$ сверху. Предложенная Э.Ландау оценка

$$\rho^*(x) \leq 2\pi(x)$$

является грубой при $y >> x$. В настоящей статье с помощью теории матриц остатков получена оценка верхней границы функции $\rho^*(x)$, а именно

$$\rho^*(x) \leq \pi(n) + 3[[\log_2 n] + 1], \quad \text{где } x = 12n.$$

Дадим, более доступное определение: *функция $\rho^*(x)$ показывает максимальное количество натуральных чисел из последовательных чисел $\lambda, \lambda+1, ..., \lambda+x+y$, каждое из которых взаимно простое со всеми простыми числами меньшими или равными x.*

Ясно, что $y >> x$, поэтому фактически нужно найти зависимость $y = f(x)$. Разумеется, на числовой оси интервалов, соответствующих определению функции $\rho^*(x)$, имеется бесчисленное множество, так как сопряженных матриц остатков по первой строке при $\lambda = 2^\epsilon$, $\epsilon > 1$ имеется бесчисленное множество [3]. Следовательно, задача нахождения функции $\rho^*(x)$ содержит и задачу нахождения самого малого натурального числа λ, с которого начинается такой интервал.

5.2 Матрицы остатков

Рассмотрим следующую матрицу, которую называем матрицей остатков [3]:

$$M_{m,n}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

где $a_{i,j}$ - остаток от деления числа $\lambda_j = \lambda + j - 1$ на P_i, P_i – i-тое простое число, $\lambda \geq 0$ – целое число, $n \geq 2$ – натуральное число, $m = \pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих n, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 5.1 *Для любого натурального n*

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(1) = \pi(n) - \nu(n),$$

где $\overline{M}_{m,n}(\lambda)$ – количество нулевых элементов (нулей) матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, $\nu(n)$ – количество различных простых делителей числа n.

Доказательство. Сопоставление матриц $M_{m,n}(0)$ и $M_{m,n}(1)$ показывает, что j-тый столбец матрицы $M_{m,n}(0)$ начиная со второго столбца, совпадает с $j-1$-ым столбцом матрицы $M_{m,n}(1)$. Причем в матрице $M_{m,n}(0)$ первый столбец отличается от всех столбцов матрицы $M_{m,n}(1)$, а последний столбец $M_{m,n}(1)$ отличается от всех столбцов матрицы $M_{m,n}(0)$.

Первый столбец матрицы $M_{m,n}(0)$ содержит $\pi(n)$ нулей, а последний столбец матрицы $M_{m,n}(1)$ содержит $\nu(n)$ нулей, следовательно,

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(1) = \pi(n) - \nu(n).$$

Теорема 5.2 *Для любого целого* $\lambda \geq 0$

$$\overline{M}_{m,n}(0,i) \geq \overline{M}_{m,n}(\lambda,i) \geq \overline{M}_{m,n}(1,i),$$

где $\overline{M}_{m,n}(\lambda,i)$ *есть количество нулей* i*-той строки матрицы* $M_{m,n}(\lambda)$.

Доказательство: Нетрудно убедиться, что

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda,i) = \overline{M}_{m,n}(0,i), \quad \text{если} \quad \lambda+a_i \equiv 0(mod\ P_i),\ \lambda+n-b_i \equiv 0(mod\ P_i),$$

$$0 \leq a_i < \frac{P_i-1}{2}, \quad 0 \leq b_i < \frac{P_i-1}{2},$$

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda,i) = \overline{M}_{m,n}(1,i), \quad \text{если} \quad \lambda+a_i \equiv 0(mod\ P_i),\ \lambda+n-b_i \equiv 0(mod\ P_i),$$

$$a_i > \frac{P_i-1}{2}, \quad b_i > \frac{P_i-1}{2}.$$

Следовательно, теорема доказана.

Следствие 3

$$\overline{M}_{m,n}(1) \leq \overline{M}_{m,n}(\lambda) \leq \overline{M}_{m,n}(0).$$

Доказательство следует из равенств:

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{M}_{m,n}(1,i) = \overline{M}_{m,n}(1), \quad \sum_{i=1}^{m} \overline{M}_{m,n}(\lambda,i) = \overline{M}_{m,n}(\lambda),$$

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{M}_{m,n}(0,i) = \overline{M}_{m,n}(0).$$

Обозначая

$$c(m,n,\lambda) = \overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1),$$

имеем

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(\lambda) = \pi(n) - c(m,n,\lambda) - \nu(n), \tag{5.1}$$

$$0 \leq c(m,n,\lambda) \leq \pi(n) - \nu(n).$$

5.3 Сопряженные матрицы остатков

Определение 14 *Две матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ называются сопряженными, если они отличаются распределением нулей только в одной строке.*

В частности, можем рассматривать такие сопряженные матрицы, которые отличаются распределением нулей только в первой строке. Например, $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ будут сопряженными матрицами по первой строке, если

$$\overline{\lambda} = \prod_{i=2}^{m} P_i + \lambda, \quad m = \pi(n). \tag{5.2}$$

Например, для $\lambda = 1$, $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$ матрица $M_{4,8}(1)$ имеет вид

$$M_{4,8}(1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для $\lambda = 1$ имеем $\overline{\lambda} = 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 106$. Сопряженная матрица $M_{4,8}(106)$ имеет вид

$$M_{4,8}(106) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 106 & 107 & 108 & 109 & 110 & 111 & 112 & 113 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как видим, все строки (кроме первой) матриц $M_{4,8}(1)$ и $M_{4,8}(106)$ совпадают.

Количество нулевых элементов сопряженной матрицы $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ обозначим через $\overline{M}_{m,n}(\overline{\lambda})$.

Определение 15 *Столбец называется соответствующим числу λ_j, если элементы этого столбца $a_{i,j}$ образовались при делении данного числа λ_j на простое число P_i и наоборот.*

Теорема 5.3 *Пустой (не содержащий ни одного нуля) столбец матрицы остатков соответствует числу λ_j, которое является взаимнопростым по отношению ко всем числам $\leq n$ и столбцу сопряженной матрицы, который содержит только один нуль, и этот нуль находится в строке $i = 1$, и обратно.*

Доказательство очевидно, см. пример. В нашем примере у матрицы $M_{4,8}(106)$ второй, четвертый и восьмой столбец соответствуют простым числам 107, 109, 113. В примере же матрицы $M_{4,8}(1)$ второй, четвертый и восьмой столбец содержат только один нуль, и этот нуль находится в строке $i = 1$.

Теорема 5.4 *Количества столбцов сопряженных (только по первой строке) матриц, каждый из которых содержит минимум один нуль в строках $i > 1$, равны между собой.*

Доказательство: если матрица содержит хоть один нуль в строке $i > 1$, и в столбце j, то и сопряженная матрица тоже в этой строке и в том же столбце содержит тот же самый нуль.

5.4 Матрицы остатков с шагом 2

Определение 16 *Матрицей остатков с шагом h называем матрицу, у которой $\lambda_j = \lambda + (j-1)h$. Обозначаем ее через $N_{m,n}(h|\lambda)$.*

Ниже будем рассматривать матрицы остатков $N_{m,n}(2|\lambda)$ с шагом 2. Они содержат $m = \pi(n)$ строк и n столбцов. При этом элемент $a_{i,j}$ матрицы $N_{m,n}(2|\lambda)$ равен остатку от деления числа $\lambda_j = \lambda + 2j - 2$ на P_i, P_i – i-тое простое число. Если число λ четное, то матрицу остатков $N_{m,n}(2|\lambda)$ называем четной. Отметим, что как и для обычной матрицы остатков $M_{m,n}(\lambda)$, у четной матрицы остатков $N_{m,n}(2|\lambda)$ первый столбец соответствует числу $\lambda_1 = \lambda$. Например, при $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 2$ матрица $N_{m,n}(2|\lambda)$ имеет вид

$$N_{4,8}(2|2) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

а при $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 0$ матрица $N_{m,n}(2|\lambda)$ имеет вид

$$N_{4,8}(2|0) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Все свойства и обозначения матриц остатков можно распространить и на четные матрицы остатков, только надо учесть, что первая строка ($P_1 = 2$) содержит лишь нули. Следовательно,

$$\overline{N}_{m,n}(2|0) - \overline{N}_{m,n}(2|2) = \pi(n) - \nu(2n), \tag{5.3}$$

где $\overline{N}_{m,n}(2|\lambda)$ – количество нулевых элементов (нулей) матрицы $N_{m,n}(2|\lambda)$, $\nu(2n)$ – количество различных простых делителей числа $2n$.

Обозначим

$$G(m, n, \lambda) = \overline{N}_{m,n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,n}(2|2). \tag{5.4}$$

Заметим, что для четных λ функция $G(m, n, \lambda)$ зависит только от строк $i > 1$, так как первые строки этих матриц содержат одинаковое количество (n) нулей и в разности (5.4) они уничтожаются.

Определение 17 *Матрицу остатков $N_{m,n}(2|\lambda)$ с шагом 2 называем нечетной, если число λ является нечетным.*

Отметим, что у нечетной матрицы остатков первый столбец соответствует числу $\lambda_1 = \lambda$, а первая строка состоит из n единиц.

Например, при $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 1$ матрица $N_{m,n}(2|\lambda)$ имеет вид

$$N_{m,n}(2|1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 0 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

Для чисел λ и $\overline{\lambda}$ связанных соотношением (5.2) все строки (кроме первой) матриц $N_{m,n}(2|\lambda)$ и $N_{m,n}(2|\overline{\lambda})$ совпадают, такие матрицы называем сопряженными матрицами по первой строке.

Так как число $\prod_{i=2}^{m} P_i$ всегда нечетное, то числа λ и $\overline{\lambda}$ имеют разную четность. Следовательно, матрица сопряженная к четной матрице будет нечетной и наоборот: матрица сопряженная к нечетной матрице будет четной.

Лемма 1 *Для нечетного λ и четного числа $\overline{\lambda} = \prod_{i=2}^{m} P_i + \lambda$ и $m = \pi(n)$ имеем*

$$G(m, n, \lambda) = \overline{N}_{m,n}(2|\overline{\lambda}) - \overline{N}_{m,n}(2\dagger\lambda) = n.$$

Доказательство: В первой строке четной матрицы $N_{m,n}(2|\overline{\lambda})$ имеется n нулей, а в первой строке нечетной матрицы $N_{m,n}(2\dagger\lambda)$ нет нулей (сплошные единицы). Так как эти матрицы сопряжены по первой строке, то остальные строки у них совпадают. Лемма доказана.

5.5 Основная теорема

Напомним, что функция $\rho^*(x)$ показывает максимальное количество натуральных чисел среди последовательных чисел $\lambda, \lambda+1, ..., \lambda+x+y$, которые взаимно просты со всеми простыми числами меньшими или равными x.

Теорема 5.5 *На числовой оси среди любых последовательных $12n$ натуральных чисел есть не более чем*

$$\pi(n) + 3\big[[\log_2 n] + 1\big]$$

чисел, каждое из которых взаимно простое со всеми простыми числами $\leq n$.

Доказательство. Рассмотрим четные матрицы $N_{m,6n}(2|2)$ и $N_{m,6n}(2|\lambda)$, где $m = \pi(n)$ и λ - четное число, $\lambda >> n$.

Отметим, что матрица $N_{m,6n}(2|2)$ составлена из чисел $2, 4, 6, ..., 12n$, а матрица $N_{m,6n}(2|\lambda)$ составлена из чисел $\lambda, \lambda+2, \lambda+4, ..., \lambda+12n-2$.

Сопоставим эти матрицы по количеству содержащихся нулей, т.е. рассмотрим следующие соотношения, вытекающие из (5.4),

$$\overline{N}_{m,6n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,6n}(2|2) = G(m, 6n, \lambda), \tag{5.5}$$

или

$$\overline{N}^{k}_{m,6n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,6n}(2|2) = G(m, n, \lambda) - \alpha, \tag{5.6}$$

где k есть количество тех столбцов матрицы $N_{m,6n}(2|\lambda)$, каждый из которых в строках $i > 1$ содержит минимум один нуль (первая строка не фигурирует, так как она состоит только из нулей), α есть количество тех столбцов этой же матрицы, каждый из которых содержит только один нуль и этот нуль в строке $i = 1$. Следовательно,

$$6n = k + \alpha$$

Докажем неравенство

$$\overline{N}^{k}_{m,6n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,6n}(2|2) \geq G(m,n,\lambda) - \pi(n) - 3\big[[\log_2 n] + 1\big]. \quad (5.7)$$

где $\overline{N}^{k}_{m,6n}(2|\lambda)$ есть количество тех столбцов матрицы $N_{m,6n}(2|\lambda)$, каждый из которых в строках $1 < i \leq m = \pi(n)$ содержит минимум один нуль. Предположим противное, т.е.

$$\overline{N}^{k}_{m,6n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,6n}(2|2) < G(m,n,\lambda) - \pi(n) - 3\big[[\log_2 n] + 1\big]. \quad (5.8)$$

Так как матрица $N_{m,6n}(2|2)$ содержит не более чем $\pi(n)+3\big[[\log_2 n]+1\big]$ столбцов, каждый из которых содержит нули только в первой строке, и $N^{k+\alpha}_{m,6n}(2|\lambda) = N_{m,6n}(2|\lambda)$, из (5.8)получим

$$\overline{N}^{k+\alpha}_{m,6n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,6n}(2|2) < G(m,n,\lambda).$$

Но это противоречит равенству (5.5). Неравенство (5.7) доказано.

Из (5.6) и (5.7) получим

$$\alpha \leq \pi(n) + 3\big[[\log_2 n] + 1\big]. \quad (5.9)$$

Вспомнив, что α есть количество тех столбцов матрицы $N_{m,6n}(2|\lambda)$, каждый из которых содержит только один нуль и этот нуль в строке $i = 1$, можем утверждать, что на числовой оси среди последовательных $6n$ четных натуральных чисел есть не более чем α чисел, каждое из которых не содержит ни одного простого нечетного делителя $\leq n$.

Но так как $6n$ последовательных четных числа составляют четную матрицу, и ей где-то на числовой оси соответствует нечетная матрица сопряженная по столбцам, которые имеют одинаковое количество, соответственно четных и нечетных столбцов, следовательно разность этих столбцов, каждый из которых содержит хотя бы один нуль в строках $1 \leq i \leq m$, не более чем $\pi(n) + 3\big[[\log_2 n] + 1\big]$.

Таким образом, четная матрица $N_{m,6n}(2|\lambda)$ и нечетная $N_{m,6n}(\lambda \mp 1)$, где $m = \pi(n)$, $\lambda \geq 2$, являются матрицами, сопряженными по столбцам, и разность их столбцов, каждый из которых содержит хотя бы один нуль в строках $1 \leq i \leq m$, тоже не более чем

$$\pi(n) + 3\big[[\log_2 n] + 1\big].$$

Таким образом

$$\rho^*(x) \leq \pi(n) + 3\big[[\log_2 n] + 1\big], \quad x = 12n, \quad y = 11n, \quad \lambda \geq 2.$$

Теорема 5.5 доказана.

Список литературы

[1] D. Hensley, J. Richards, “Primes in Intervals”, Acta Arithm., vol 25, no.4, 375-394, 1974.

[2] Janos Pintz, “Landau’s problems on primes”, J. Theor, Nombres, Bordeaux, vol. 21, no. 2, pp. 357-404, 2009.

[3] Мкртумян Э.Л. О простых и взаимнопростых числах в специальных промежутках I.

6 Смежные матрицы остатков и метод решета

В статье показано, что простые числа Мерсена (M_p) и простые числа Ферма (F_p) бесчисленны и указаны их места на числовой оси. Исследование проводится методом матриц остатков, предложенного автором.

6.1 Введение

Числа вида $F_n = 2^{2^n} + 1$ называются числами Ферма, если они простые, то их обозначаем F_p. Если число вида $2^n - 1$ – простое, то оно называется простым числом Мерсена и обозначается M_p.

Моя цель – показать, что простые числа Мерсена (M_p) и простые числа Ферма (F_p) бесчисленны и указать их места на числовой оси.

Многие поколения математиков (и не только математиков) занимались проблемами простых чисел Мерсена и Ферма, но не смогли доказать их бесчисленность. У консервативных математиков, кто пренебрегает теорией матриц остатков, большие трудности возникают при нахождении очередного простого числа Мерсена или Ферма. Все эти трудности удается преодолеть с помощью развитой автором теории матриц остатков.

6.2 Матрицы остатков, столбцы без нулей

Рассмотрим следующую матрицу, которую называем матрицей остатков:

$$M_{m,n}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

где $a_{i,j}$ - остаток от деления числа $\lambda_j = \lambda + j - 1$ на P_i, P_i – i-тое простое число, $\lambda \geq 0$ – целое число, $n \geq 2$ – натуральное число, $m = \pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих n, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$.

Например, для $\lambda = 8$, $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$ матрица $M_{4,8}(8)$ имеет

вид

$$M_{4,8}(8) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что простым числам большим чем n, соответствуют столбцы без нулей, а простым числам $P_i \leq n$, соответствуют столбцы с одним нулем в строке $i > 1$.

Обозначим через $\nu(x)$ количество различных простых делителей числа x. В матрице $M_{m,2n}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$, количество нулевых остатков столбца j обозначим через $\nu^*_m(j)$, а количество ненулевых остатков столбца j обозначим через $L_m(j)$. Так как в каждом столбце имеется $m = \pi(n)$ нулевых и ненулевых остатков, то

$$L_m(j) + \nu^*_m(j) = \pi(n) = m. \tag{6.1}$$

6.3 Смежные матрицы остатков

Одним из фундаментальных понятий теории матриц остатков является понятие Смежных матриц остатков.

Определение 18 *Две матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\lambda + 1)$ называются смежными матрицами остатков.*

Например, для матрицы $M_{4,8}(8)$: смежной будет матрица $M_{4,8}(9)$ имеющая вид

$$M_{4,8}(9) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $\overline{M}_{m,n}(\lambda)$ – количество нулевых элементов (нулей) матрицы $M_{m,n}(\lambda)$. Исследуем вопрос чем отличается количество нулевых элементов у смежных матриц. Обозначим через $\nu^*_m(j)$ количество нулевых остатков столбца j в матрице $M_{m,n}(1)$.

Теорема 6.1 *Для любых m, n и λ имеет место*

$$\left|\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(\lambda+1)\right| = |\nu^*_m(\lambda) - \nu^*_m(\lambda+n)| \geq 0.$$

Доказательство. Из (6.1) имеем для матрицы $M_{m,n}(\lambda)$

$$L_m(\lambda) + \nu^*_m(\lambda) = \pi(n),$$

Так как матрица $M_{m,n}(\lambda+1)$ получается из матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ сдвигом на один столбец влево, то j-тый столбец матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ совпадает с $j-1$ столбцом матрицы $M_{m,n}(\lambda+1)$, $j = 2, 3, ..., n$. Таким образом, столбцы матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ кроме первого, совпадают со столбцами матрицы $M_{m,n}(\lambda+1)$ кроме последнего. Следовательно,

$$\left|\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(\lambda+1)\right| = |L_m(\lambda) - L_m(\lambda+1)| = |\nu^*_m(\lambda) - \nu^*_m(\lambda+n)| \geq 0.$$

Теорема доказана.

Замечание. Запись $|\nu^*_m(\lambda) - \nu^*_m(\lambda+n)| \geq 0$ в теореме удивляет многих математиков, которые считают, что это тривиально, так как модуль не может быть отрицательным. Такой записью мы хотели подчеркнуть, что для некоторых n и λ, выражение $|\nu^*_m(\lambda) - \nu^*_m(\lambda+n)|$ может быть нулем, например $\nu^*_m(10) = \nu^*_m(21)|$. Таким образом взаимосвязь чисел на числовой оси матричная математика представляет глубже чем существующая.

Теорема 6.2 *В матричной математике имеют место соотношения*

$$\left|\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(\lambda+1)\right| = |\nu^*_m(\lambda) - \nu^*_m(\lambda+n)| = 1,\ n < \lambda,\ m = \pi(n),$$

если

1) $\lambda = p$ - простое число; $\lambda + 1 = 2^r$, где r - натуральное число;

2) $\lambda + 1 = p$ - простое число, где $n = 2^r$, или наоборот.

Доказательство следует из сопоставления смежных матриц остатков $M_{m,p}(p)$ и $M_{m,p}(p+1)$ и сведением к разности их нулевых остатков

$$|L_m(\lambda) - L_m(\lambda+1)| = |\nu^*_m(\lambda) - \nu^*_m(\lambda+1)| = 1.$$

Следствие. Если

$$|\nu^*_m(\lambda) - \nu^*_m(\lambda+1)| = |L_m(\lambda) - L_m(\lambda+1)| = 1,$$

то

$$\left|\overline{M}_{m,n}(n) - \overline{M}_{m,n}(n+1)\right| = 1.$$

Доказательство следствия тривиально следует из доказательства теоремы. Сразу видно, что следствие и теорема верны, если $n = p$- простое число, а $n + 1 = 2^r$ или наоборот.

Теорема 6.3 *Если $p = 2^n + 1$ простое число, то $q = (2^n)^2 + 1 = 4^n + 1$ - тоже простое число.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,q}(1)$, где $m = \pi(2^n)$. Зачеркнем те столбцы, которые имеют минимум один нуль в строках $1 < i \leq m$. Столбцы, соответствующие числам 1 и 2, 2^n и $2^n + 1$, $(2^n)^2$ и $(2^n)^2 + 1$, не зачеркнуты по теореме 6.2 и Следствию, и так как в матричной математике

$$\left|\overline{M}_{m,q-1}(1) - \overline{M}_{m,q-1}(2)\right| = \left|\overline{M}_{m,q-p}(p-1) - \overline{M}_{m,q-p}(p)\right| =$$

$$= \left|\overline{M}_{m,p-1}(1) - \overline{M}_{m,p-1}(2)\right| = |\nu^*_m(2) - \nu^*_m(1)| = |L_m(\lambda) - L_m(\lambda+1)| = 1.$$

Это означает, что число q - простое. Теорема доказана.

Теорема 6.3 содержит более глубокий смысл, чем то, что следует из того, что $2^n + 1$ - простое число, т.е. видно что n не только четное, но и не может иметь простых нечетных делителей. Это подсказывает, что в матричной математике простые числа Ферма можно найти среди чисел, расположенных ближе к началу числовой оси, а потом определить остальные дальше от начала числовой оси. То есть

$$2^2 + 1 = 5, \quad (2^2)^2 + 1 = 17, \quad ((2^2)^2)^2 + 1 = 257, ...$$

Так можно найти все простые числа Ферма F_p до бесконечности.

Великий Ферма "метод бесконечного спуска" применил совместно с понятием "среднего арифметического". Но гениальный Ферма к сожалению не был знаком с теорией матриц остатков и не предполагал что "среднее арифметическое"на числовой оси может быть точкой, а не числом. Поэтому Ферма допустил некоторые просчеты, как например его предположение, что все числа вида $F_n = 2^{2^n} + 1$ являются простыми.

Теорема 6.4 *Если $q = 2^p - 1$ - простое число, то $2^q - 1 = q_k$ - тоже простое число.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,q_k}(1)$, где $m = \pi(2^p - 2)$. Пользуясь Теоремой 6.2, и тем, что матрицы $M_{m,q_k-q}(q-1)$ и $M_{m,q_k-q}(q)$ - смежные, аналогично доказательству теоремы 6.3 получим доказательство теоремы 6.4, т.е. $2^2-1 = 3, 2^3-1 = 7, 2^7-1 = 127,...$

Отметим, что не все простые числа Мерсена получаются таким способом. Например $2^5 - 1 = 31$ тоже простое число Мерсена, и 31 как и 3 становитсв началом новой серии простых чисел Мерсена. Все простые числа Мерсена можно получить с помощью этих двух серий. Это вытекает из десятиричности матричной математики, где простые числа 2,3 и 5 играют основополагающую роль. Этим и отличается существующая математика от матричной математики, а простые числа Мерсена, от простых чисел Ферма!

Список литературы

[1] Rosser, Schoenfeld, Illinois J. Math., vol. 6, pp. 64-89, 1962.

[2] Landau. Handbuch der Lehre von der Verteilungen der Primzahlen, Leipzig, 1909.

[3] Мкртумян Э.Л. Матрицы остатков, Вестник ЕрГосУнт-а. 1995. No2 С. 107-108.

7 Матрицы остатков и проблема Шинцеля

В статье иследуются последовательности натуральных чисел, содержащие числа, взаимно простые со всеми числами меньшими заданного числа, зависящего от длины последовательности. Исследование проводится методом матриц остатков. Доказана проблема Шинцеля о простых числах в арифметических прогрессиях

Известный польский математик А. Шинцель выдвинул гипотезу, что любая арифметическая прогрессия $ax_i + b$, $1 \leq b < a$, $(a, b) = 1$ содержит хотя бы одно простое число, если $0 \leq x_i \leq a$. Эта задача известнс как проблема Шинцеля и до сих пор не решена. Специалистам известно [1] сколько усилий и времени потребовалось для доказательства бесконечности простых чисел в арифметической прогрессии. Матрицы остатков облегчают решение таких задач.

7.1 Матрицы остатков с шагом 2

Определение 19 *Матрицей остатков с шагом h называем матрицу, у которой $\lambda_j = \lambda + (j-1)h$. Обозначаем ее через $N_{m,hn}(h|\lambda)$.*

Обозначим через $\pi(n)$ количество простых чисел, не превосхадящих целое число n. Ниже будем рассматривать матрицы остатков $N_{m,2n}(2|\lambda)$ с шагом 2. Они содержат $m = \pi(n)$ строк и $2n$ столбцов. При этом элемент $a_{i,j}$ матрицы $N_{m,2n}(2|\lambda)$ равен остатку от деления числа $\lambda_j = \lambda + 2j - 2$ на P_i, P_i – i-тое простое число. Если число λ четное, то матрицу остатков $N_{m,2n}(2|\lambda)$ называем четной. Отметим, что как и для обычной матрицы остатков $M_{m,n}(\lambda)$, у четной матрицы остатков $N_{m,2n}(2|\lambda)$ первый столбец соответствует числу $\lambda_1 = \lambda$. Например, при $n = 4$, $m = \pi(4) = 2$, $\lambda = 2$ матрица $N_{m,2n}(2|\lambda)$ имеет вид

$$N_{4,8}(2|2) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

а при $n = 4$, $m = \pi(4) = 2$, $\lambda = 0$ матрица $N_{m,2n}(2|\lambda)$ имеет вид

$$N_{4,8}(2|0) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Все свойства и обозначения матриц остатков можно распространить и на четные матрицы остатков, только надо учесть, что первая строка ($P_1 = 2$) содержит лишь нули. Следовательно,

$$\overline{N}_{m,2n}(2|0) - \overline{N}_{m,2n}(2|2) = \pi(n) - \nu(2n), \quad m = \pi(n), \tag{7.1}$$

где $\overline{N}_{m,2n}(2|\lambda)$ – количество нулевых элементов (нулей) матрицы $N_{m,2n}(2|\lambda)$, $\nu(2n)$ – количество различных простых делителей числа $2n$.

Обозначим

$$G(m,n,\lambda) = \overline{N}_{m,2n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,2n}(2|2). \tag{7.2}$$

Заметим, что $G(m,n,\lambda)$ зависит только от строк $i > 1$, так как первые строки этих матриц содержат одинаковое количество ($2n$) нулей и в разности (7.2) они уничтожаются. Следовательно,

$$0 \le G(m,n,\lambda) \le \pi(n) - 1.$$

Определение 20 *Матрицу остатков $N_{m,2n}(2|\lambda)$ с шагом 2 называем четной, если число λ (а значит и все числа $\lambda_j = \lambda + 2j$) являются четными.*

Определение 21 *Матрицу остатков $N_{m,2n}(2\dagger\lambda)$ с шагом 2 называем нечетной, если число λ (а значит и все числа $\lambda_j = \lambda + 2j$) являются нечетными*

Отметим, что у нечетной матрицы остатков первый столбец соответствует нечетному числу $\lambda_1 = \lambda$, а первая строка состоит из $2n$ единиц.

Например, при $n = 4$, $m = \pi(4) = 2$, $\lambda = 1$ матрица $N_{m,2n}(2\dagger\lambda)$ имеет вид

$$N_{m,2n}(2\dagger 1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

7.2 Расширенные матрицы остатков

Расширим нечетную матрицу $N_{m,2n}(2\dagger 1)$, добавив m^* строк, соответствующих квадратам простых чисел P_q, лежащих в интервале $3 \le$

$P_q \le \sqrt{4n}$ (m^* - количество простых чисел P_q, лежащих в интервале $3 \le P_q \le \sqrt{4n}$). Это означает, что каждое число, соответствующее столбцу матрицы делим еще и на P_q^2 и полученный остаток приписываем в соответстующий столбец. Расширенную матрицу обозначим $N_{m_*,2n}(2\dagger 1)$ и $N_{m_*,2n}(2|2)$, где $m = \pi(n)$, $m_* = m + m^*$, $m^* = \pi(\sqrt{4n})$. Например, при $n = 4$ в интервале $3 \le P_q \le \sqrt{16} = 4$ есть одно простое число $p_q = 3$. Таким образом $m = \pi(4) = 2$, $m^* = 3$,

$$N_{m_*,8}(2\dagger 1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

Цель расширения - создание критерия, по которому можно отличить простые числа от составных.

7.3 Еше раз о простых и взаимнопростых числах в специальных промежутках

Теорема 7.1 *Для любого натурального n*

$$\pi(n) + [\log_2 n] - 2 \le \pi(4n) - \pi(2n) \le \pi(n) + 2[\log_2 n] + 1. \qquad (7.3)$$

Доказательство. Рассмотрим нечетную матрицу $N_{m,2n}(2\dagger 1)$, (столбцы которой соответствуют числам $1, 3, 5, ..., 2n-1$) и четную матрицу $N_{m,2n}(2|2)$ (столбцы которой соответствуют числам $2, 4, 6, ..., 2n$), $m = \pi(n)$. Расширим эти матрицы, добавив m^* строк, соответствующих квадратам простых чисел P_q, лежащих в интервале $3 \le P_q \le \sqrt{4n}$ (m^* - количество простых чисел P_q, лежащих в интервале $3 \le P_q \le \sqrt{4n}$). Это означает, что каждое число, соответствующее столбцу матрицы делим еще и на P_q^2 и полученный остаток приписываем в соответстующий столбец. Расширенную матрицу обозначим $N_{m_*,2n}(2\dagger 1)$ и $N_{m_*,2n}(2|2)$, где $m = \pi(n)$, $m_* = m + m^*$, $m^* = \pi(\sqrt{4n})$. Например, при $n = 4$ имеем $m = \pi(4) = 2$, $m^* = \pi(\sqrt{4n})$,

$$N_{m_*,8}(2\dagger 1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

$$N_{m_*,8}(2|2) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 4 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix},$$

Зачеркнем те столбцы, которые имеют минимум 2 нуля в строках $1 < i \le m_*$. В нечетной матрице $N_{m_*,2n}(2\dagger 1)$ зачеркнем еще столбцы, соответствующие простым числам $n < p_k < 2n$ (таких столбцов будет $\pi(2n) - \pi(n)$). В матрице $N_{m_*,2n}(2|2)$ зачеркнем еще столбцы, соответствующие числам вида $2p_k \le 4n$.

1. Количество незачеркнутых столбцов в нечетной матрице $N_{m_*,2n}(2\dagger 1)$ будет

$$k_1^* = \pi(4n) - \pi(2n) + \pi(n),$$

так как первый столбец не зачеркнут.

Количество зачеркнутых столбцов в матрице $N_{m_*,2n}(2\dagger 1)$ будет $k_1 = 2n - k_1^*$.

2. Количество незачеркнутых столбцов в четной матрице $N_{m_*,2n}(2|2)$ обозначим через k_2^*. С одной стороны имеем

$$k_2^* \ge 2\pi(n) + [\log_2 n] - 2,$$

так как не зачеркнуты столбцы, соответствующие числам $2p_i$ и $4p_i$, где $2 < p_i \le n$; $4p_i \le 4n$; также не зачеркнуты столбцы, соответствующие числам $2^r p_i$, $r > 2$ и $[\log_2 2n]$.

С другой стороны имеем

$$k_2^* \le 2\pi(n) + 2[\log_2 n] + 1,$$

количество чисел вида $2^r p_i$ меньше, чем $[\log_2 n] + 1$. Так как количество столбцов в матрицах $N_{m_*,2n}(2\dagger 1)$ и $N_{m_*,2n}(2|2)$ равны между собой, то расставляя столбцы матриц по максимальному количеству нулей (вначале незачеркнутые, а потом зачеркнутые) и сопоставляя матрицы, получим

$$\pi(n) + [\log_2 n] - 2 \le \pi(4n) - \pi(2n) \le \pi(n) + 2[\log_2 n] + 1.$$

Теорема 7.1 доказана.

Теорема 7.2 *Для любого натурального n*

$$[\log_2 n] + \pi(n) + 1 \le \pi(6n) - \pi(3n) \le \pi(n) + 3[\log_2 n] + 2. \qquad (7.4)$$

Доказательство. Рассмотрим расширенные матрицы $N_{m_*,3n}(2\dagger 1)$ и $N_{m_*,3n}(2|2)$, где $m_* = m + m^*$. Зачеркнем те столбцы, которые имеют минимум 2 нуля в строках $1 < i \le m_*$. В нечетной матрице $N_{m_*,3n}(2\dagger 1)$ зачеркнем еще столбцы, соответствующие простым числам $n < p_k < 3n$, $p_i p_k \le 6n$. В матрице $N_{m_*,3n}(2|2)$ зачеркнем еще столбцы, соответствующие числам вида $2p_k$ и $4p_k$, если $4p_k \le 6n$, $2p_i p_k \le 6n$, $2 < p_i < n$, $n < p_k < 3n$.

1. Количество незачеркнутых столбцов в нечетной матрице $N_{m_*,3n}(2\dagger 1)$ будет

$$k_1^* = \pi(6n) - \pi(3n) + \pi(n),$$

а количество зачеркнутых столбцов будет $k_1 = 3n - k_1^*$.

2. Количество незачеркнутых столбцов в четной матрице $N_{m_*,3n}(2|2)$ обозначим через k_2^*. С одной стороны имеем

$$k_2^* \ge 2\pi(n) + 1 + [\log_2 n],$$

так как не зачеркнуты столбцы, соответствующие числам $2p_i$ и $4p_i$, где $2 < p_i \le n$; $4p_i \le 4n$; также не зачеркнуты столбцы, соответствующие числам $2^r p_i$, $r > 2$ и $[\log_2 6n]$, их количество не более чем

$$k_2^* \le 2\pi(n) + 3[\log_2 n] + 2.$$

Расставляя столбцы матриц как в теореме 7.1 и сопоставляя их, получим

$$[\log_2 n] + \pi(n) + 1 \le \pi(6n) - \pi(3n) \le \pi(n) + 3[\log_2 n] + 2.$$

Теорема 7.2 доказана.

Теорема 7.3 *Для любого натурального n*

$$\pi(2n) - \pi(n) \ge \pi(n) - \pi(\sqrt{2n}) - [\log_2 n] + [\log_3 n] - 1. \qquad (7.5)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(n+1)$, где $m = \pi(n)$. Расширим эти матрицы, добавив m^* строк, соответствующих квадратам простых чисел P_q, лежащих в интервале $3 < P_q \le \left[\sqrt{2n}\right]$. Зачеркнем те столбцы, которые имеют минимум 2 нуля в строках $1 < i \le m_*$.

1. Количество незачеркнутых столбцов в матрице $M_{m,n}(1)$ будет

$$k_1^* = \pi(n) + [\log_3 n] + [\log_2 n] - 1,$$

Первый столбец не зачеркнут, а числа 2 и 3 одновременно и простые и вида 2^r, 3^r.

2. Количество незачеркнутых столбцов в матрице $M_{m,n}(n+1)$ обозначим через k_2^*. Имеем

$$k_2^* \le \pi(2n) - \pi(n) + 2,$$

а количество зачеркнутых столбцов будет

$$k_2 \le \pi(n) - \pi(\sqrt{2n}) - [\log_2 n] + [\log_3 n],$$

так как среди чисел $n+1, n+2, ..., 2n$ есть одно число вида 2^r, и возможно есть еще одно число вида 3^r. Расставляя столбцы матриц как в теореме 7.1 и учитывая, что число 1 не простое, получим

$$\pi(2n) - \pi(n) \ge \pi(n) - \pi(\sqrt{2n}) - [\log_2 n] + [\log_3 n] - 1.$$

Теорема 7.3 доказана.

Следствие. Уравнение $\pi(2x) = 2\pi(x)$ имеет ровно 2 решения: $x_1 = 4$, $x_2 = 10$. Доказательство следует из факта, что наша математика 10-иричная.

Теорема 7.4 *Для любого натурального n*

$$\pi(n(n+1)) - \pi(n^2) \ge \left[\frac{1}{2}\log_2 n\right] - 1. \tag{7.6}$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m,n^2}(1)$ и $M_{m,n^2}(n+1)$, где $m = \pi(n^2)$. Так как столбцы, соответствующие числам $n+1, n+2, ..., n^2$ у матриц общие, можем их не учитывать а сразу сопоставлять матрицы $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(n^2+1)$, где $m = \pi(n^2)$. Зачеркнем те столбцы, которые имеют минимум один нуль в строках $1 < i \le m$.

1. Количество незачеркнутых столбцов в матрице $M_{m,n}(1)$ будет

$$k_1^* = [\log_2 n] + 1,$$

а количество зачеркнутых столбцов будет $k_1 = n - k_1^*$.

2. Количество незачеркнутых столбцов в матрице $M_{m,n}(n^2+1)$ обозначим через k_2^*. Учтем, что все четные столбцы в матрице $M_{m,n}(n^2+1)$ зачеркнуты, а из нечетных столбцов не зачеркнуты только те, которым соответствуют простых чисел P_q, лежащих в интервале $n^2 < P_q <$

$n(n+1)$. Заметим, что для нечетных n количество четных столбцов матрицы $M_{m,n}(n^2+1)$ на 1 больше, чем количество четных столбцов матрицы $M_{m,n}(1)$, а количество нечетных столбцов на 1 меньше, чем количество нечетных столбцов матрицы $M_{m,n}(1)$.

Расставляя столбцы матриц по максимальному количеству нулей (вначале незачеркнутые, а потом зачеркнутые) и учитывая, что $k_2^* = \pi(n(n+1)) - \pi(n^2)$, получим

$$k_2^* = \pi(n(n+1)) - \pi(n^2) \geq \left[\frac{[\log_2 n]}{2}\right] - 1.$$

Теорема 7.4 доказана.

Следствие.

$$\pi(n^2) - \pi((n-1)^2) \geq \pi(2n) - \pi(n) - \left[\frac{3[\log_2 n]}{2}\right] - 2.$$

$$\left[\frac{(\pi(2n) - \pi(n) - 1)}{3}\right] - 1 \leq \pi(n^2) - \pi((n-1)^2) \leq \left[\frac{(\pi(2n) - \pi(n) + 1)}{2}\right] + 1,$$

$$[\log_2 n] - 1 \leq \pi(n^2) - \pi((n-1)^2) \leq \pi(n) - \left[\frac{[\log_2 n]}{2}\right] + 2.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству Теоремы 4, рассмотрением матриц $M_{m,n^2}(1)$ и $M_{m,n^2}(2n+1)$, где $m = \pi(n^2)$ и сопоставлением матриц $M_{m,2n}(1)$ и $M_{m,2n}(n^2+1)$, где $m = \pi(n^2)$.

7.4 Симметричные матрицы остатков, симметричность чисел на числовой оси

Так как четные числа (по отношению начала числовой оси) относительно нечетных, перемещены на единицу вправо (или влево, смотря в какую сторону смотреть), поэтому математика на числовой оси стала однобокой, а математические действия приобрели направление (к примеру: сложение и умножение - в правую сторону, а вычитание и деление - в левую) и результаты математических операций стали некоммутативными, т.е. относительными.

Мне совершенно непонятно, число "минус"$2n$ является четным или нечетным?! Ведь знак "минус"показывает только направление! Однобокий подход консервативных математиков к нулю как числу превращал ее в фикцию, и числа на числовой оси становились равноправными.

От этих недостатков свободна матричная математика, в которой введено глобальное понятие натурального нуля O_n в матрице $M_{m,2n+1}(O_n)$, где $\nu^*_m(O_n) = \pi(n)$. В матричной математике, ограничивая отрезок числовой оси, определяют поведение математических операций на этом отрезке, а затем распространяют их на большие отрезки. Для этого в матричной математике создано основополагающее понятие матрицы остатков, где нулевой остаток уже не фикция, а реальный объект.

Чтобы четные и нечетные числа были расположены симметрично относительно какой-нибудь точки в матричной математике рассматривают матрицу остатков с нечетным числом столбцов. Средний столбец такой матрицы становится осью симметрии. В матричной математике фундаментальное значение имеет матрица $M_{m,2n+1}(O_n)$, где $m = \pi(n)$, крайние столбцы которой соответствуют числам O_n и $2n$, а средний столбец – числу n, четность которого не всегда зависит от четности крайних столбцов. Поэтому матричная математика показывает, что четность на числовой оси понятие относительное, что приводит к относительности всех математичиских операций на числовой оси.

7.5 Проблема Шинцеля

В [2] подробно объяснено, какое важное значение имеет распределение простых чисел в арифметических прогрессиях.

Теорема 7.5 *Арифметическая прогрессия* $ax_i + b_i$, *где* $1 \le b_i < a$, $(a, b_i) = 1$ *содержит не менее чем*

$$\left[\frac{[\log_2 a]}{2}\right] - 1$$

простых чисел, если $0 \le x_i \le a$.

Доказательство проведем в рамках матричной математики. Рассмотрим матрицы $N_{m,p}(p|p)$ и $N_{m,p}(\bar{p}\dagger p + b_i)$ как матрицы с шагом p, где $m = \pi(p-1)$. Матрицу $M_{m,p^2}(p)$ можно представить в виде

$$M_{m,p^2}(p) = N_{m,p}(p|p) + N_{m,p}(p|p + b_i),$$

где $1 \le b_i \le p-1$, и p - простое число. Следовательно, в матричной математике матрицы вида $M_{m,p^2}(p)$, где $m = \pi(p-1)$, как и прогрессия $px_i + b_i$, где $1 \le b_i < p$ содержат все простые числа p_k, где $p < p_k < p^2$.

В матрицах $N_{m,p}(p|p)$ и $N_{m,p}(\vec{p}\dagger p+b)$, составленных из чисел $p, 2p, ..., p^2$ и $p+b, 2p+b, ..., p^2+b$ зачеркнем те столбцы, которые имеют минимум один нуль в строках $1 < i \leq m$.

1. Количество незачеркнутых столбцов в матрице $N_{m,p}(p|p)$ будет

$$k_1^* = [\log_2 p] + 2,$$

а количество зачеркнутых столбцов будет $k_1 = p - [\log_2 p] - 2$.

2. Количество незачеркнутых столбцов в матрице $N_{m,p}(\vec{p}\dagger p+b)$ обозначим через k_2^*, а количество зачеркнутых столбцов обозначим через k_2. Учтем, что не все четные столбцы в матрице $N_{m,p}(p|p)$ зачеркнуты, а из нечетных столбцов не зачеркнуты только те, которым соответствуют простые числа p и p^2. Заметим, что для нечетных n количество четных столбцов матрицы $N_{m,p}(p|p)$ на 1 больше, чем количество четных столбцов матрицы $N_{m,p}(\vec{p}\dagger p+b)$, а количество нечетных столбцов на 1 меньше, чем количество нечетных столбцов матрицы $N_{m,p}(\vec{p}\dagger p+b)$. Следовательно,

$$k_2 \leq k_1 + \left[\frac{[\log_2 p] + 2}{2}\right],$$

так как количество зачеркнутых четных столбцов матрицы $N_{m,p}(\vec{p}\dagger p+b)$ от количества нечетных столбцов матрицы $N_{m,p}(p|p)$ не могут быть больше, чем $\left[\frac{[\log_2 p]}{2}\right]$, потому что их всего $[p/2]$. Однако имеем

$$G(m,n,p) = \overline{N}_{m,p}(\vec{p}\dagger p+b) - \overline{N}_{m,p}(p|p).$$

Следовательно, $k_2^* \geq \left[\frac{[\log_2 p]}{2}\right] - 1$. Таким образом k_2^* показывает количество простых чисел, которые соответствуют столбцам матрицы $N_{m,p}(\vec{p}\dagger p+b)$. Следовательно, k_2^* показывает те члены арифметической прогрессии px_i+b, которые соответствуют простым числам. Таким образом, теорема доказана для простых p.

Для составного числа a рассмотрим матрицы $N_{m,a}(a|a)$ и $N_{m,a}(\vec{a}\dagger a+b)$, где $1 \leq b < a$, $(a,b) = 1$. Зачеркнем еще те столбцы, которые имеют минимум один нуль в строках соответствующих простым делителям числа a. Продолжая аналогично доказательству для случая $a = p$ получим, что Проблема Шинцеля с помощью матричной математики не только доказывается, но и серьезно усиливается.

Список литературы

[1] Прахар К. Распределение простых чисел М.: Наука, 1967.

[2] Rankin R.A. “The difference between consecutive prime numbers,”, London Math. Soc. 13 (1938), 242-247.

[3] И.В. Арнольд, Теория чисел, Гостехиздат, Москва, 1939.

[4] Мкртумян Э.Л. О простых числах в специальных промежутках, глава 1 данного сборника.

8 Проблема Гольдбаха

В статье дается краткое и независимое решение проблемы Гольдбаха методом матриц остатков, который разработан автором. Выявлены некоторые аспекты глубинной сущности проблемы.

8.1 Введение

Гольдбах в 1742г высказал предположение, что любое четное число, большее 4 можно представить в виде суммы двух простых чисел, а любое нечетное число, большее 7 можно представить в виде суммы трех простых чисел [1].

В настоящее время доказаны следующие утверждения:

Предложение 1 *Существует число N, что любое нечетное число, большее N представимо в виде суммы трех простых чисел.*

Предложение 2 *"Почти все" четные числа представимы в виде суммы двух простых чисел, точнее говоря, количество четных чисел не превосходящих x, которые не представимы в виде суммы двух простых чисел, имеет порядок $O(x/\ln^A x)$ при $x \to \infty$, где A – некоторое положительное число (не обязательно целое).*

Заметим что константа в $O(x/\ln^A x)$ может существенно зависеть от A.

Сначала Харди и Литлвуд [1] доказали эти утверждения с помощью до сих пор не доказанной гипотезы. И.М.Виноградову, [1], [2] удалось доказать эти утверждения независимо от этой гипотезы. Эти все доказательства очень сложны и громоздки.

В настоящей статье дается краткое и независимое решение проблемы Гольдбаха для всех чисел методом матриц остатков, который разработан автором. Выявлены некоторые аспекты глубинной сущности проблемы.

8.2 Матрицы остатков

Рассмотрим следующую матрицу, которую называем матрицей остатков:

$$M_{m,n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

где $a_{i,j}$ - остаток от деления числа $j-1$ на P_i, P_i – i-тое простое число, $n \geq 2$ – натуральное число, $m = \pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих n, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$. Например,

$$M_{m,7} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

Для любого натурального n матрица остатков обладает следующими свойствами:

1) В первом столбце только нули, их количество равно $m = \pi(n)$.

1a) Во втором столбце только единицы, их количество равно $m = \pi(n)$.

2) Последний n-ый столбец матрицы $M_{m,n}$ содержит $\nu(n-1)$ нулей, где $\nu(n)$ – количество различных простых делителей числа n.

3) Если число $n-1$ простое, то последний n-ый столбец матрицы $M_{m,n}$ содержит ровно 1 нуль и этот нуль в последней строке.

Рассмотрим теперь передвинутую матрицу остатков $M_{m,n}(\lambda)$, которая получается сдвигом столбцов матрицы $M_{m,n} = M_{m,n}(0)$ на λ столбцов направо, где $\lambda \geq 0$ – целое число. Элемент $a_{i,j}$ матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ есть остаток от деления числа $\lambda_j = \lambda + j - 1$ на P_i, P_i – i-тое простое число, $n \geq 2$ – натуральное число, $m = \pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих n, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$. Например,

$$M_{m,7}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Свойство 2) для сдвинутых матриц имеет вид:

2а) Последний n-ый столбец матрицы $M_{m,n}(1)$ содержит $\nu(n)$ нулей,

Обозначая

$$c(m,n,\lambda) = \overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1),$$

имеем [3]

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(\lambda) = \overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(1) - (\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1)) =$$

$$= \pi(n) - \nu(n) - c(m,n,\lambda), \tag{8.1}$$

Отсюда получаем

$$0 \le c(m,n,\lambda) \le \pi(n) - \nu(n).$$

8.3 Средний столбец матрицы остатков и ее свойства

Средним столбцом матрицы остатков называется столбец, равноудаленный от краев. Дальность в матрицах остатков рассчитывается количеством столбцов.

Очевидно, что матрица остатков $M_{m,n}(\lambda)$ обладает средним столбцом тогда и только тогда, когда n - нечетное. Матрица остатков $M_{m,n}(\lambda)$ обладает средним столбцом, когда крайние столбцы соответствуют числам одинаковой четности.

Отметим очевидное, но важное свойство: Если из двух концов матрицы, обладающей средним столбцом, зачеркнуть равное количество столбцов, то средний столбец матрицы незчеркнутых столбцов совпадает со средним столбцом прежней матрицы.

Заметим, что средний столбец матрицы остатков может совпадать со средним столбцом другой матрицы остатков с другими размерами. Например, у матрицы остатков $M_{m,2n-1}(1)$, $m = \pi(n)$ крайние столбцы соответствуют числам 1 и $2n-1$, а средний столбец соответствует числу n и совпадает со средним столбцом матрицы $M_{m,2n+1}(O_n)$, где $m = \pi(n)$, $O_n = \prod_{i=1}^{m} P_i$.

Самая маленькая матрица остатков, которая обладает средним столбцом, имеет три столбца.

8.4 Средний столбец матрицы и проблема Гольдбаха

Теорема 8.1 *a) Любое натуральное составное четное число представимо в виде суммы двух простых чисел,*

b) Любое натуральное четное число большее 6 представимо в виде суммы двух различных простых чисел,

c) Любое натуральное четное число большее 8 представимо в виде суммы трех различных простых чисел,

d) Любое натуральное нечетное число большее 5 представимо в виде суммы трех простых чисел,

e) Любое натуральное число большее 17 представимо в виде суммы трех различных простых чисел,

Доказательство. Достаточно доказать свойство a) или e), остальные из них следуют. Рассмотрим матрицу остатков $M_{m,2n-1}(1)$, где $m = \pi(n)$. Такая матрица обладает средним столбцом, так как имеет нечетное количество столбцов. Два столбца матрицы $M_{m,2n-1}(1)$ назовем симметричными, если они равноудалены от среднего столбца. Очевидно, сумма чисел соответствующих симметричным столбцам равна $2n$, где n - соответствует среднему столбцу.

Зачеркнем все столбцы матрицы $M_{m,2n-1}(1)$, номера которых соответствуют составным числам. При этом не зачеркиваем средний столбец, который соответствует числу n. Фактически проводим метод решета для чисел $1, 2, 3, ...2n-1$, не зачеркивая числа n.

При любой четности числа n, слева от среднего столбца останутся незачеркнутыми столбцы, номера которых соответствуют простым числам P_i, где $2 \leq P_i < n$, а также первый столбец (единица не простое и не составное число). Таким образом слева от среднего столбца количество незачеркнутых столбцов будет $\pi(n)$. Справа от среднего столбца останутся незачеркнутыми столбцы, номера которых соответствуют простым числам P_k, где $n < P_k < 2n$. Таким образом справа от среднего столбца количество незачеркнутых столбцов будет $\pi(2n) - \pi(n)$.

Например, при $n = 11$, имеем $m = \pi(11) = 5$. В матрице $M_{m,2n-1}(1) = M_{5,21}(1)$ слева от среднего столбца $n = 11$ незачеркнутым столбцам соответствуют числа 1,2,3,5,7; а справа от среднего столбца незачеркнутым столбцам соответствуют числа 13,17,19. Если $2n-1$ – простое

число, то его не рассматриваем, так как его симметричным будет незачеркнутый первый столбец. Итак, справа от среднего столбца имеем 3 незачеркнутых столбца, которым соответствуют числа 13,17,19. Слева им соответствуют 3 симметричных нечетных столбца. Но слева от среднего столбца имеем только 1 зачеркнутый нечетный столбец, соответствующий составному числу 9. Следовательно, существует две пары симметричных незачеркнутых столбцов (17 и 5) и (19 и 3), а сумма чисел соответствующих симметричным столбцам равна $2n = 22$).

Очевидно, что столбец симметричный незачеркнутому столбцу может быть как зачеркнутым, так и незачеркнутым. Остается доказать, что для любого n существует пара симметричных незачеркнутых столбцов (а сумма чисел соответствующих симметричным столбцам равна $2n$) и проблема Гольдбаха будет решена.

В случае основной матрицы $M_{m,2n+1}(O_n)$, где $m = \pi(n)$, крайние столбцы которой соответствуют числам O_n и $2n$, справа от среднего столбца имеем $\pi(2n)-\pi(n)$ незачеркнутых столбца. Слева им соответствуют $\pi(2n) - \pi(n)$ симметричных нечетных столбца. Но в матрице могут быть незачеркнутые нечетные столбцы p_i* и p_k*, которые относительно среднего столбца расположены симметрично и $p_i*+p_k* = 2n$. Примером такой пары могут служить незчеркнутые столбцы p_i и p_k, находяшиеся на ближайших расстояниях от среднего столбца n (в ту или другую сторону), если расстояние от p_i до числа 1 будет равно расстоянию от p_k до числа $2n-1$, или если расстояние от p_k до числа 1 будет равно расстоянию от p_i до числа $2n-1$. Потому что при любой четности числа n четные и нечетные столбцы будут расположены равноудаленно от n (дальность считается по количеству столбцов).

Так как в матрице $M_{m,2n-1}(1)$ четные столбцы по отношению к нечетным столбцам передвинуты на единицу вправо и количество четных столбцов (соответствующих четным числам) в матрице $M_{m,2n-1}(1)$ на единицу меньше, чем количество нечетных столбцов, то справа от n зачеркнуто на $\left[\frac{[\log_2 n]+1}{2}\right] - 1$ больше столбцов, чем слева. Получается, что

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \left[\frac{[\log_2 n] + 1}{2}\right] - 1, \tag{8.2}$$

или

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \left[\frac{\pi(n)}{2}\right], \quad n > 5. \tag{8.3}$$

Сопоставлением формул (8.2) и (8.3) получаем, что пункты a), b) и c)

Теоремы 8.1 доказаны.

Что касается пунктов d) и e), то их можно получить из пунктов a), b) и c), вычитая из любого нечетного числа простое, и представляя полученное четное число в виде суммы двух простых чисел. То же самое можно получить рассматривая столбцы матрицы $M_{m,2n-1}(1)$, где $m = \pi(n)$, которые соответствуют числам $2n-4$, $2n-3$, $2n-2$, $2n-1$ и $2n$. Из простых делителей этих чисел всегда можно найти 3 таких, сумма которых была бы $2n-1$. Таким образом, Теорема 8.1 полностью доказана.

Теорема 8.2 *Любое натуральное составное четное число* $2n$ *представимо в виде суммы двух простых чисел не менее, чем* $\frac{1}{2}[\log_2 n]$ *раз.*

Доказательство. 1) Вначале допустим, что $n = p$ - простое число. Нужно ответить на вопрос: кроме $p + p = 2p = 2n$ могут ли быть еще пары разных простых чисел p_i и p_k, для которых

$$p_i + p_k = 2p = 2n, \tag{8.4}$$

и сколько могут быть еще таких пар?

В силу свойств смежных матриц имеем (см. главу 6)

$$|L_m(p_i) - L_m(p_k)| = |\nu^*_m(p_i) - \nu^*_m(p_k)| = 1, \tag{8.5}$$

$$|L_m(2^r) - L_m(p_i)| = |\nu^*_m(2^r) - \nu^*_m(p_i)| = 0, \tag{8.6}$$

$$|L_m(2^r) - L_m(p_k)| = |\nu^*_m(2^r) - \nu^*_m(p_k)| = 1, \tag{8.7}$$

где $1 < 2^r < p$. Так как равенства (8.5) - (8.7) справедливы для всех сочетаний столбцов (чисел) 2^r, p_i и p_k, то учитывая (8.2) приходим к выводу, что количество пар разных простых чисел p_i и p_k, для которых $p_i + p_k = 2n$, не менее, чем $\frac{1}{2}[\log_2 n]$, так как простые числа вида $p^*_i = 2^r \pm 1$, $p^*_i < p$ будут иметь своих напарников p^*_k, где $p^*_i + p^*_k = 2p$.

2) Допустим, что n - составное число. В матрице $M_{m,2n-1}(1)$ зачеркнем еще те столбцы, номера которых соответствуют простым числам $1 \le p_c < n$. При любой четности числа n, слева от среднего столбца останутся незачеркнутыми столбцы, номера которых соответствуют

простым числам P_a, где $2 \leq p_a < n$, $p_c|n$, $p_a\dagger n$; а справа от среднего столбца останутся незачеркнутыми столбцы, номера которых соответствуют простым числам P_k, где $n \leq p_k < 2n$. Так как количество простых чисел P_a, имеющих симметричных (относительно среднего столбца) напарников из простых чисел P_k, зависит от величины $[\log_2 n]$, которая мало отличается от случая $n = p$, следовательно, учитывая (8.2)-(8.7)), получим доказательство Теоремы 8.2.

Таким образом, Теорема 8.2 доказана и проблема Гольдбаха полностью решена и значительно усилена!

Примечание. Если бы проблема Гольдбаха была сформулирована как: *Любое натуральное четное число представимо в виде разности двух простых чисел*,

то его доказательство было бы намного легче, изменилась бы трактовка числовой оси со стороны математиков и математика без лишних затруднений обошлась бы только целыми числами.

P.S. Доказательство проблемы Гольдбаха профессором Виноградовым воспринимается по-разному. На самом деле профессор Виноградов доказал проблему Гольдбаха или опроверг?! Ведь число, больше которого все четные числа представимы в виде суммы двух простых чисел, столь велико, что даже при современной технике невозможно его определить! Получается, что есть огромное количество четных чисел, про которых это доказательство ничего не говорит. Не говоря уже про отрицательных четных чисел.

Мне кажется, независимо от всего, профессор Виноградов доказал, что существующая математика беспомощна для решения задач, в которых рассматриваются взаимоотношения объектов, имеющих "бесконечно большие" и "бесконечно малые"размеры. Такой вывод мне кажется намного ценнее, чем само доказательство проблемы Гольдбаха!

Список литературы

[1] Прахар К. Распределение простых чисел М.: Наука, 1967.

[2] И.В. Арнольд, Теория чисел М.: Наука, 1939.

[3] Э.Л. Мкртумян, главы 1 и 6 настоящего сборника.

ДОПОЛНЕНИЕ

1 Свойства матриц остатков

Определение 1.

Матрицы остатков, имеющие одинаковые размеры, ширина $\pi(n)$, длина n, называются подобными.

Пример.

Матрицы $M_{m,n}(\lambda_1)$ и $M_{m,n}(\lambda_2)$, где $m = \pi(n), |\lambda_1 - \lambda_2| > 0$, λ_1, λ_2 - натуральные числа.

Определение 2.

Подобные матрицы, имеющие общие столбцы, называются сдвинутыми матрицами остатков.

Пример.

Матрицы $M_{m,n}(\lambda_1)$ и $M_{m,n}(\lambda_2)$, где $m = \pi(n), 1 < |\lambda_1 - \lambda_2| < n$.

Определене 3.

Подобные матрицы, не имеющие общих столбцов, называются противолежащими матрицами остатков.

Пример.

Матрицы $M_{m,n}(\lambda_1)$ и $M_{m,n}(\lambda_2)$, где $|\lambda_1 - \lambda_2| > n$.

Теорема 1.1

Матрицу $M_{m,kn}(1)$, где $m = \pi(n), n > k$ - натуральное число, можно представить как сумму k сдвинутых матриц, в каждой из которых n столбцов.

Доказательство очевидно, т.к.

$$M_{m,kn}(1) = M_{m,n}(1) + M_{m,n}(n+1) + M_{m,n}(2n+1) + \cdots + M_{m,n}(n(k-1)+1).$$

Теорема 1.2

Матрицу $M_{m,2n}(1)$ где $m = \pi(n)$ можно представить как сумму четной и нечетной матриц.

Доказательство тривиально, т.к.

$$M_{m,2n}(1) = N_{m,n}(2 \dagger 1) + N_{m,n}(2|2),\ m = \pi(n).$$

Теорема 1.3

Если один из крайних столбцов и средний столбец матрицы $M_{m,2n+1}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$, λ - натуральное число, содержит нулевой остаток в любой строке $1 < i \leq m$, то и другой крайный столбец этой же матрицы содержит нулевой остаток в этой же строке.

Доказательство.

Допустим λ_a и λ_b соответствуют крайним столбцам, а λ_c - среднему столбцу матрицы $M_{m,2n+1}(\lambda)$

1) Допустим $2 \dagger \lambda_a, 2 \dagger \lambda_b$,

но $p_i|\lambda_a$ и $p_i|\lambda_c$, где $2 < p_i \leq n$ - простое число. Следовательно $p_i|\lambda_b$ и обратно.

2) Допустим $2|\lambda_a, 2|\lambda_b$, но $p_i|\lambda_b$ и $p_i|\lambda_c$, где $2 < p_i \leq n$ - простое число, следовательно $p_i|\lambda_a$ и обратно.

Следствие 1.

Если $p_i|\lambda_a, p_i|\lambda_b, p_i|\lambda_c$, то $p_i|n$ и число $\lambda + n$ соотвествует среднему стобцу матрицы $M_{m,2n+1}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$.

Доказательство тривиально вытекает из даказательства Теоремы 1.3.

Следствие 2.

Средний столбец матрицы $M_{m,2n+1}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$, не имеет нулевого остатка в строках $1 < i < m$, если хоть один из крайних стобцов не имеет нулевых остатков в строках $1 < i \leq m$.

Доказательство.

По Теореме 1.3 известно, что если в матрице $M_{m,2n+1}(\lambda)$ число n содержит простой нечетный делитель $p_i \leq n$, тогда $(\lambda_a, \lambda_c) \neq 1, (\lambda_a, \lambda_b) \neq 1, (\lambda_b, \lambda_c) \neq 1$, т.е. имеют общий делитель. Следовательно $(\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c) \neq 1$. Но если λ_a или λ_b не имеют общего простого нечетного делителя $p_i \leq n$, то тогда получим $(\lambda_a, n) = 1, (\lambda_b, n) = 1$, (т.е. λ_a и λ_b взаимно простые числа), следовательно $(\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c) = 1$.

Теорема 1.4.

Если средний столбец матрицы $M_{m,2n-1}(1)$, где $m = \pi(n)$, в строках $1 < i \leq m$ содержит минимум два нулевых остатка, то один из этих нулевых остатков находится в строке $i = 2$ или в строке $i = 3$.

Доказательство.

Рассмотрим матрицу $M_{m,2n+2}(0_n)$. Здесь 0_n - натуральный ноль

$$0_n = \prod_{i=1}^{m} p_i, \;\; m = \pi(n).$$

Эту матрицу получаем из матрицы $M_{m,2n-1}(1)$, прибавляя к ней с двух сторон по стобцу, которые соответствуют числам 0_n и $2n$. Ясно, что средние столбцы у этих двух матриц совпадают и соотвествуют числу n.

1) Пусть $2 \dagger n$.

a) При 3|n теорема ясна, т.к. по условию теоремы $n \neq 3^r$.

b) При $3 \dagger n$, или $3|n-1$ или $3|n+1$. В том и в другом случаях $5|n$, т.к. $5|0_n$ и $n \neq 5^r$.

2) Пусть 2|n, рассуждая также, приходим к выводу, что теорема доказана.

Следствие.

Если средний столбец матрицы $M_{m,2n-1}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$, в строках $1 < i \leq m$ содержит минимум два нулевых остатка, то один из этих нулевых остатков находится в строке $i = 2$ или в строке $i = 3$.

Доказательство.

Так как при любой четности λ число n соответствует среднему столбцу матрицы $M_{m,2n-1}(\lambda)$, то доказательство Следствия тривиально.

2 Квадратные матрицы. Фокусы матриц остатков

Определение 1.

Матрица остатков $M_{m,n}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$ называется квадратной, если количество ее столбцов n равно полному квадрату натурального числа.

Определение 2.

Если столбец матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ имеет нулевые остатки в тех же строках, что и крайные столбцы зтой же матрицы, то такой столбец называется фокусом, а крайние столбцы называются побочными фокусами этой матрицы.

Например, для $\lambda = 9$, $n = 8$, $m = \pi(4) = 2$ матрица $M_{2,8}(9)$ имеет вид

$$M_{2,8}(9) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Столбец, соответствующий числу 12, является фокусом.

Теорема 2.1

Для любого числа a матрица остатков $M_{m,2a+2}(a^2), m = \pi(a+1)$ обладает фокусом(а значит и побочными фокусами).

Доказательства.

Матрица $M_{m,2a+2}(a^2), m = \pi(a+1)$ составлена из чисел $a^2, a^2 + 1, \cdots, (a+1)^2 = b^2$. Первый столбец соответствует числу a^2, которое делится a. Последний столбец соответствует числу b^2, которое делится $b = a + 1$. Следовательно столбец, соотвествующий числу $a(a+1)$ является фокусом, а столбцы, соответствующие числам a^2 и b^2 являются побочными фокусами. Теорема доказана.

Теорема 2.2.

Разность квадратов двух натуральных чисел обладает фокусом.

Доказательство.

Рассмотрим матрицы $M_{m,a^2}(1)$ и $M_{m,b^2}(1)$, где $0 < a < m,\ m = \pi(b)$. Так как имеет место равенство

$$\nu(a^2b^2) = \nu(a^2) + \nu(b^2) = \nu(ab) = \nu(a) + \nu(b).$$

Пусть s - фокус разности матриц $M_{m,a^2}(1) - M_{m,b^2}(1)$. Тогда, в зависимости от величины разности $(b-a)$, имеют место соотношения

1) $a^2 < s < b^2$, если $a^2 < ab < b^2$.

2) $a < s < a^2$, если $a < \frac{b}{2}$.

Теорема 2.3.

Имеет место соотношение

$$\left[\frac{1}{2}(\pi(2n) - \pi(n) + 1)\right] \leq \pi(4n) - \pi(2n) \leq \pi(n). \tag{2.1}$$

Доказательство.

Рассмотрим матрицы $M_{m,2n}(1)$ и $M_{m,2n}(2n+1)$, где $m = \pi(n)$. Зачеркнем все те столбцы зтих матриц, каждый из которых содержит как минимум один нулевой остаток в строках $1 \leq i \leq m$. Тогда имеем

1) В матрице $M_{m,2n}(1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_1^* = \pi(2n) - \pi(n) + 1.$$

При этом учтено, что столбец, соотвествующий числу 1, тоже не зачеркнут.

2) В матрице $M_{m,2n}(2n+1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* = \pi(4n) - \pi(2n).$$

Расставим стобцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые. Сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим соотношение (2.1). Это следует из того, что

$$\overline{M}_{m,2n}(2n+1) - \overline{M}_{m,2n}(1) = c(m, n, 2n+1).$$

Теорема 2.4.

Имеет место соотношение

$$2\left[\log_2 n\right] - 1 \leq \pi((n+1)^2) - \pi((n-1)^2) \leq 2\left[\log_2 n\right] + 1. \tag{2.2}$$

Доказательство.

Рассмотрим матрицы

$$N_{m,\lambda}(2\dagger 1)\ and\ N_{m,\lambda}(2|2),\ \ \lambda = \left[\frac{n^2}{2}\right],\ \pi((n-1)^2).$$

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, каждый из которых содержит как минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq \pi((n-1)^2) = m$. Тогда имеем

1) В матрице $N_{m,\lambda}(2\dagger 1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_1^* = \pi((n+1)^2) - \pi((n-1)^2) + 1.$$

2) В матрице $N_{m,\lambda}(2|2)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* = 2\left[\log_2 n\right].$$

Расставим стобцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые. Сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим соотношение (2.2).

Следствие.

Соотношение

$$\left[\frac{\pi(n) + [\log_2 n]}{2}\right] - 1 \leq \pi(4n) - \pi(2n) \leq \pi(n) - \left[\frac{[\log_2 n]}{2}\right] + 2 \qquad (2.3)$$

не вызывает сомнений.

Доказательство.

Рассмотрим матрицы $N_{m,n}(2|2)$ и $N_{m,n}(2 \dagger 2n+1)$, где $m = \pi(n)$.

1) В матрице $N_{m,n}(2 \dagger 2n+1)$ зачеркнем все те столбцы, каждый из которых соотвествует составному числу. Количество незачеркнутых столбцов в ней есть

$$k_1^* = \pi(4n) - \pi 2n).$$

2) Матрица $N_{m,n}(2|2)$ четная, поэтому каждый ее столбец делим еще на квадрат простого числа p_q, где $2 < p_q \leq \sqrt{4n}$. Полученные остатки занесем в соотвествующие столбцы этой матрицы. Зачеркнем все те столбцы этой матрицы, каждый из которых содержит минимум два нулевых остатков. Количество незачеркнутых столбцов в ней станет равным

$$k_2^* = \pi(n) + [\log_2 n].$$

т.к. среди чисел $n+1, n+2, \ldots 2n$ есть только одно число вида 2^r.

Расставим столбцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом эачеркнутые. Сопоставляя матрицы с таким расположением стобцов, получим соотношение (2.3).

3 Средняя матрица остатков

Определение.

Матрица, обладающая средним столбцом, который соотвествует натуальному числу, называется средней матрицей.

Теорема 3.1.

Если матрица обладает средним столбцом, то она обладает и средней матрицей.

Доказательство.

Рассмотрим матрицу $M_{m,2n+1}(\lambda), m = \pi(n)$. Она обладает средним столбцом, потому что при любой четности числа λ ее крайние столбцы соотвествуют числам одинаковой четности. При $2|\lambda$ то и $2|\lambda + 2n$, а при $2 \nmid \lambda$ то и $2 \nmid \lambda + 2n$.

Из краев этой матрицы зачеркивая одинаковое число n_1 столбцов, где $1 \leq n_1 < n$, мотрица образованая из незачеркнутых столбцов станет средней матрицей остатков прежней матрицы.

Следствие 1.

Матрица, обладающая средним столбцом, обладает определенным количеством средних матриц, самая малая из которых содержит 3 столбца.

Это очевидно из Теоремы 3.1.

Следствие 2.

Любое число может стать средним столбцом определенного количества средних матриц.

Доказательство.

Возмем любое натуральное число N. Разделим это число на простые числа $\pi(n), n < N$. Из полученных остатков составим столбец N, который соответствует числу N. Разделив числа $(N-n), (N-n+1), \cdots, N+n$ на простые числа $\pi(n)$, составим из их остатков столбцы, которые вместе со столбцом N образуют матрицу $M_{m,2n+1}(\lambda-n), m = \pi(n)$. Эти столбцы расположены с двух сторон столбца N. Эта новая матрица есть средняя матрица исходной матрицы $M_{m,2N+1}(1), m = \pi(n)$. Средний столбец этой матрицы соотвествует числу N.

Следствие доказано.

Следствие 3.

Если из двух сторон матрицы $M_{m,2n+1}(\lambda), m = \pi(n)$, средний столбец которой соответствует числу λ^* зачеркнуть столбцы

$$\lambda^* - n_1, \lambda^* - n_1 + 1, \cdots, \lambda^*, \lambda^* + 1, \ldots, \lambda^* + n_1,$$

где $1 < n_1 < n$, то зачеркнутые столбцы совместно со столбцом λ^* будут образовывать матрицу, которая есть средняя матрица прежней матрицы.

Доказательство тривиально.

Замечание.

Теорема 3.1. своими следствиями ограничивает „положительный“ участок числовой оси, который подлежит изучению. Но принимая число 0_n как натуральное можно свойства среднего столбца и средней матрицы распространить и на отрицательный участок числовой оси, считая 0_n средним столбцом матрицы, крайние столбцы которой соответствуют числам $-a$ и $+a$.

Теорема 3.2

Средний столбец матрицы $M_{m,p^2}(1)$, где $2 < p$ - простое число, $m = \pi(p)$, соотвествует простому числу.

Доказательство.

Рассмотрим матрицу $M_{m,p^2}(1)$, где $m = \pi(p)$. Так как ее крайние столбцы соотвествуют нечетным числам, то она обладает средним столбцом. Обозначим его λ^*. С двух сторон этой матрицы зачеркнем те столбцы, которые имеют нулевые остатки в строках $1 < i \leq m$.

Заметим, что число λ^* не зачеркнуто, потому что, не может содержать простых нечетных делителей $\leq p$. Так как λ^* есть и средний столбец матрицы $M_{m,p^2+2}(0_n)$. В противном случае получим, что число 1 составное. Число λ^* находится на равных расстояниях от числа 0_n и от числа $p^2 + 1$. Но его не нужно перепутать со средним арифметическим чисел 1 и p^2, или (-1) и p^2. Поэтому делитель числа λ^* находится не в столбце, который соотвествует числу $0_n = \prod_{i=1}^{m} p_i,\ m = \pi(n), n = p$, а в столбце, который соответствует числу 0 (ноль), и считаем, что оно кратно всем числам.

Число λ^* получит нулевой остаток только тогда, когда ширина матрицы $M_{m,p^2}(1)$ станет равной m_*, т.е. когда мы будем иметь $m = m_* = \pi(\lambda^*)$.

Таким образом получаем, что λ^* не имеет простого делителя $\leq [\sqrt{2p^2}]$, следовательно λ^* - простое число. Теорема доказана.

Следствие.

Если число p^2-1 не кратно 5, то число p^2+1 кратно 5, где p - простое число.

Доказательство.

Если число p^2 заканчивается цифрой 1 (p заканчивается цифрой 1 или 9), то число p^2-1 кратно 5. А если число p^2 заканчивается цифрой 9 (p заканчивается цифрой 3 или 7), p^2+1 кратно 5. Следствие доказано.

Теорема 3.3.

Уравнение

$$x^2+y^2=z^2, \tag{3.1}$$

где $0<x<y<z,\ (x,y)=1,(x,z)=1,(y,z)=1$, имеет решение в целых числах, если хоть одно из этих чисел не содержит более двух простых нечетных делителей.

Доказательство.

Известно, что числа

$$z=a^2+b^2, y=a^2-b^2, x=\sqrt{2ab} \tag{3.2}$$

удовлетворяют уравнению (3.1) тогда и только тогда, когда a и b числа различной четности и $(a,b)=1$.

Симметричность уравнения (3.1) позволяет рассмотреть случай

1) $2\dagger a,\ 2|b,\ 2\dagger c$.

2) $2\dagger a,\ 2\dagger b,\ 2|c$.

Потому что одно из чисел a,b,c должно быть четным.

Рассмотрим фокусы матриц, составленных из чисел $z^2-a^2=b^2$ и $z^2-b^2=a^2$ (См. Теорему 2.2).

Нетрудно убедиться, что условие $(a,z)=1,(z,b)=1,(a,b)=1$ необходимо, но не достаточно, чтобы числа a,b,c удовлетворяли уравнению (3.1). Потому что в формуле (3.2) значение x должно быть рациональным (целым положительным числом). Учитывая Теоремы 1.3, 1.4, получаем $a=2^r,\ b=p^s$, где p - простое число, $2\dagger r, 2|s$, но s может быть и равным 0 (нулю).

4 Простые числа в определенных промежутках чисел, и оценка их количества с двух сторон

Теорема 4.1. Справедливо неравество

$$\pi(\frac{n}{2})-2\left[\log_2\sqrt{n}\right]-1\le\pi(2n)-\pi(n)\le\pi(n)-\left[\log_2\sqrt{n}\right]+1.$$

Доказательство.

Расссмотрим матрицы $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(n+1)$, где $m = \pi(n)$. Расширим эти матрицы, т.е. каждое число, соответствующее каждому столбцу этих матриц делим еще на квадрат простого числа p_q, где $2 < p_q < \sqrt{2n}$, и на 2^r, где $\sqrt{n} < 2^r \leq \sqrt{2n}$. Полученные остатки записываем в соответствующем столбце данной матрицы. Общий вид расширенной матрицы обозначим $M_{m_*,n}(\lambda), m_* = m + m^*$, где $m = \pi(n), m_* = \pi(\sqrt{2n}), p_q \neq 2$. Разность нулевых остатков имеет вид

$$\overline{M}_{m_*,n}(n+1) - \overline{M}_{m_*,n}(1) = c_*(m_*, n+1, n). \tag{4.1}$$

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, каждый из которых содержит минимум два нулевых остатка.

1) В матрице $M_{m_*,n}(1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим k_1^*. Имеем

$$k_1^* \leq \pi(n) + \left[\log_2 \sqrt{n}\right].$$

А количество зачеркнутых стобцов k_1, где

$$k_1 \geq n - k_1^* = n - \pi(n) - \left[\log_2 \sqrt{n}\right].$$

2) В матрице $M_{m_*,n}(n+1)$ количество незачернутых столбцов обозначим k_2^*. Получим

$$k_2^* = \pi(2n) - \pi(n).$$

А количество зачеркнутых стобцов k_2 равняется

$$k_2 = n - \pi(2n) + \pi(n).$$

Потому что среди чисел $n+1, n+2, \cdots, 2n$ есть одно число вида 2^r, где $n < 2^r \leq 2n$.

Расставим столбцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы сначала расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые. Учитывая соотношение (4.1) и то, что количество столбцов в матрицах равны между собой, получим соотношение

$$\pi(\frac{n}{2}) - 2\left[\log_2 \sqrt{n}\right] - 1 \leq \pi(2n) - \pi(n) \leq \pi(n) - \left[\log_2 \sqrt{n}\right] + 1.$$

Теорема доказана.

Теорема 4.2.

Снраведливо неравенство

$$\pi(\frac{n}{2}) - 2\left[\log_3 \sqrt{n}\right] - 1 \leq \pi(2n) - \pi(n) \leq \pi(n) - \left[\log_3 \sqrt{n}\right] + 1.$$

Доказательство.

Рассмотрим матрицы $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(n+1)$ где $m = \pi(n)$. Расширим их так же, как в Теореме 4.1. За исключением того, что теперь $2 \leq p_q \leq \sqrt{2n}$, но $p_q \neq 3$.

Зачеркнем все те столбцы этих расширенных матриц, каждый из которых содержит минимум два нулевых остатка.

1) В матрице $M_{m_*,n}(1)$ количество незачеркнутых столбцов k_1^* равно

$$k_1^* = \pi(n) + [\log_3 n] .$$

А количество зачеркнутых стобцов k_1 равно

$$k_1 = n - k_1^* = n - \pi(n) - [\log_3 n] .$$

Потому что столбцы, соответствующие числам 1,2,3 не зачеркнуты, а числа 2 и 3 одновременно и простые, и вида $2^r, 3^r$.

2) В матрице $M_{m_*,n}(n+1)$ количество незачернутых столбцов обозначим k_2^*

$$k_2^* \leq \pi(2n) - \pi(n) + 1.$$

Потому что возможно существует число 3^r, такое, что $n < 3^r < 2n$. Обозначая количество зачеркнутых столбцов k_2, получим, что k_2 удовлетворяет неравенству

$$k_2 \geq n - \pi(2n) + \pi(n) - 1.$$

Расставляя столбцы матриц так же, как при доказательстве Теоремы 4.1, получим

$$\pi(\frac{n}{2}) - 2\left[\log_3 \sqrt{n}\right] - 1 \leq \pi(2n) - \pi(n) \leq \pi(n) - \left[\log_3 \sqrt{n}\right] + 1.$$

Теорема доказана.

Теорема 4.3

Имеют место соотношения

$$2\left(\pi(\frac{n^2}{2}) - [\log_2 n]\right) - 1 \leq \pi(n^2) \leq 2\pi(\frac{n^2}{2}) - [\log_2 n] + 1.$$

и

$$2\pi(\frac{n^2}{2}) - \left[\frac{3\pi(n)}{4}\right] - 1 \leq \pi(n^2) \leq 2\pi(\frac{n^2}{2}) - \left[\frac{\pi(n)}{4}\right] + 1.$$

Доказательство.

Рассмотрим матрицу матрицу $M_{m,n^2}(1)$, где $m = \pi(\lambda), \lambda = \left[\frac{n^2}{2}\right]$.

Расширим эту матрицу т.е. каждое число, соотвествущее каждому столбцу этой матрицы, делим на квадрат простого числа p_q, где $2 \leq p_q \leq [\sqrt{2n^2}]$. И еще делим на 2^r, где $n < 2^r \leq 2n$. Полученные остатки записываем в соотвествущие столбцы матрицы.

Ширина матрицы станет $m_* = \pi(\lambda) + \pi(n) = m + m^*$, где $m = \pi(\lambda), m^* = \pi(n)$, учитывая и строку, которая соответствует числу 2^r.

Так как расширенную матрицу $M_{m_*,n^2}(1)$ можно представить в виде

$$M_{m_*,n^2}(1) = M_{m_*,\lambda}(1) + M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1),$$

где $m_* = \pi(\lambda) + \pi(n)$. Номера строк $i_* = i + i^*, \lambda = \left[\frac{n^2}{2}\right]$.

Зачеркнем все те стобцы этих матриц, в каждом из которых есть минимум два нулевых остатка.

1) В матрице $M_{m_*,\lambda}(1)$ количество незачеркнутых столбцов $k_1^* = \pi(\lambda) + [\log_2 n]$, а количество зачеркнутых столбцов равно $k_1 = \lambda - \pi(\lambda) - [\log_2 n] = \lambda - k_1^*$.

2) В матрице $M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим k_2^*, а зачеркнутых - k_2. Получим соотношения

$$k_2^* \leq k_1^* - [\log_2 n] + 1,$$

или

$$k_2^* \geq k_1^* - 2\,[\log_2 n] - 1.$$

Потому что количество зачеркнутых четных столбцов (соответствуют четным числам) в матрице $M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1)$ больше на величину

$$[\log_2 n] + 1, if\ 2|n, and\ + 0,\ if\ 2 \dagger n,$$

чем количество зачеркнутых четных столбцов матрицы $M_{m_*,\lambda}(1)$.

Расставляя столбцы матрицы $M_{m_*,\lambda}(1)$ и матрицы $M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1)$ по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одного конца стояли зачеркнутые столбцы, а потом не зачеркнутые, и сопоставляя матрицы в таком расположении столбцов, учитывая соотношения

$$\overline{M}_{m_*,\lambda}(\lambda + 1) - \overline{M}_{m_*,\lambda}(1) = c_*(m_*, n, \lambda),$$

$$M_{m_*,n^2}(1) = N_{m_*,\lambda}(2 \dagger 1) + N_{m_*,\lambda}(2|2)$$

получим

$$2\left(\pi(\frac{n^2}{2}) - [\log_2 n]\right) - 1 \leq \pi(n^2) \leq 2\pi(\frac{n^2}{2}) - [\log_2 n] + 1.$$

$$2[\log_2 n] - 1 \leq k_1^* - k_2^* \leq 2[\log_2 n] + 1,$$

$$2\pi(\frac{n^2}{2}) - \left[\frac{3\pi(n)}{4}\right] - 1 \leq \pi(n^2) \leq 2\pi(\frac{n^2}{2}) - \left[\frac{\pi(n)}{4}\right] + 1.$$

Теорема доказана.

Следствие.

Справедливо соотношение

$$\pi(n(n+1)) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(n^2) \leq \pi(n(n-1)) + [\log_2 n] + 1.$$

Доказательство.

Рассмотрим матрицы $M_{m_*,n^2}(1)$ и $M_{m_*,n^2}(n+1)$, где $m = \pi(n^2)$. Аналогично теореме расширим их и зачеркнем их столбцы.

1) В матрице $M_{m_*,n^2}(1)$ количество незачеркнутых столбцов есть

$$k_1^* = \pi(n^2) + [\log_2 n]$$

.

2) В матрице $M_{m_*,n^2}(n+1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* \leq \pi(n^2) - \pi(n) + [\log_2 n].$$

Так как количество тех столбцов, каждый из которых содержит минимум два нулевых остатка у матрицы $M_{m_*,n^2}(n+1)$ максимум на $\pi(n) - [\log_2 n] + 1$ больше, чем зачеркнутые столбцы матрицы $M_{m_*,n^2}(1)$, получаем формулу

$$\pi(n(n+1)) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(n^2) \leq \pi(n(n-1)) + [\log_2 n] + 1.$$

Следствие доказано.

Теорема 4.4

Если $m = \pi(n)$, то имеет место соотношение

$$2m^2 - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(n^2) \leq 2m^2 + [\log_2 n] + 1.$$

Доказательство.

Рассмотрим матрицу $M_{m_*,n^2}(1)$, ее можно представить в виде

$$M_{m_*,n^2}(1) = M_{m_*,\lambda}(1) + M_{m_*,\lambda}(\lambda+1), \tag{4.2}$$

где $m_* = \pi(\lambda) + \pi(n), \lambda = \left[\frac{n^2}{2}\right]$.

Матрицы из формулы (4.2) расширили и зачеркнули в них столбцы, как в Теореме 4.3. Из столбцов $\pi(\lambda) + \left[\log_2 \sqrt{\lambda}\right]$, которые не зачеркнуты в матрице $M_{m_*,\lambda}(1)$ один столбец, который соответствует числу 1, не имеет нулевого остатка (пустой). А каждый из других $\pi(\lambda) + \left[\log_2 \sqrt{\lambda}\right] - 1$ столбцов имеет по одному нулевому остатку.

В матрице $M_{m_*,\lambda}(\lambda+1)$ в зачеркнутых столбцах добавились максимум $\pi(n) + [\log_2 n] + 1$ нулевых остатков.

Так как при $2|n$ количество зачеркнутых четных столбцов матрицы $M_{m_*,\lambda}(\lambda+1)$ больше, чем количество зачеркнутых четных столбцов матрицы $M_{m_*,\lambda}(1)$ на $[\log_2 n] + 1$, а количество незачеркнутых нечетных столбцов меньше максимум на $\pi(n) - [\log_2 n] - 1$, следовательно, учитывая соотношение

$$\bar{M}_{m_*,\lambda}(\lambda+1) - \bar{M}_{m_*,\lambda}(1) = c_*(m_*, m, \lambda+1),$$

получим

$$2m^2 - [\log_2 n] - 1 \le \pi(n^2) \le 2m^2 + [\log_2 n] + 1.$$

Где $m = \pi(n)$.

Потому что, если n^2 показывает количество столбцов матрицы $M_{m,n^2}(1)$, то m^2 и $[\log_2 n]$ характеризуют разность количеств столбцов матриц $M_{m,\lambda}(\lambda+1)$ и $M_{m,\lambda}(1)$, которые соответствуют простым числам.

Теорема 4.4 доказана.

Следствие 1.

Имеет место соотношение

$$2\pi(n^2) - 2\,[\log_2 n] - 1 \le \pi(2n^2) \le 2\pi(n^2) - [\log_2 n] + 1.$$

Доказательство.

Рассмотрим матрицу $M_{m_*,2n^2}(1)$, расширяя ее и зачеркивая столбцы, как в Теореме 4.3, и рассуждая аналогично с доказательством Теоремы 4.4, получим Следствие 1.

Замечание.

Принимая число „Ноль“ кратным всем целым числам, автоматически принимается, что число 1 (1 - масштаб числовой оси) не делится на любое число. Это приводит нас к тому, что составное число имеет минимум два простых делителя, т.е. простое число делится только на 1, и

число 1 есть „абсолютно простое число“, т.к. не имеет других делителей на данной числовой оси.

Следовательно, на числовой оси число кратно не самому себе, а кратно своему порядковому номеру.

Можно согласится, что это более логично, чем считать, что число делится на самого себя, потому что имея 30 яблок, 6 детям можем отдать по 5, 5 детям по6, 10 по 3, 15 по 2, а 30 по 1. Если из 30 детей только одному отдать 30 яблок, а 29 детей оставить без яблок, то это буднт не только несправедливым, но и нелогичным. Этот пример показывает, что процесс деления на числовой оси тоже зависит от точки отсчета, и число n отдалено от точки 0 на n отрезков единичной длины, и никто не сможет гарантировать, что любой из этих отрезков можно разделить на n_1 равных частей, где $1 < n_1 < n$. Если заранее не предполагать, что этот единичный отрезок состоит из n_1 равных частей. Теорема Фалеса на числовой оси неточна, и привела существующую математику к „порочному кругу“ непрерывности числовой оси и относительности математических операций на числовой оси. Мы можем разделить произвольный отрезок на две равные части с помощью циркуля и линейки. Но тогда возникает проблема, к какой половине отнести центральную точку? Ведь на числовой оси числа прдставляются отрезками. Именно в этом смысле мы и считаем, что теорема Фалеса неточна.

Существующая математика основано на аксиоме, что 0 кратен всем целым числам, т.е. 0 делится без остатка на все целые числа. Но на числовой оси эта аксиома приводит к ограничениям. Или точнее, к противоречиям, как например, что число „Ноль“ равно сумме или разности всех чисел. Не учитывая их, сталкиваемся с огромным количеством проблем в различных разделах математики. Цель математики не только найти и использовать различные соотношения. Например не только рассмотреть соотношения $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2=r^2$, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ и использовать их по отдельности, но и выяснить их взаимосвязь.

Теория матриц остатков использует понятие натурального нуля

$$0_n=\prod_{i=1}^{m} p_i, \quad m=\pi(n).$$

Ограничивает отрезок числовой оси длиной kn, где $k \leq n$ - любое натуральное число, и изучает числа, которые образовались на участке kn при помощи всевозможных комбинаций чисел, которые на числовом отрезке [1,n] называем простыми. Поэтому теория матриц остатков не оставляет белых пятен на числовой оси и постепенно раскрывает их.

5 Степенные матрицы остатков

Определение 1.

Матрица остатков называется степенной, если количество ее столбцов равно целой степени натурального числа.

Общий вид степенной матрицы обозначим

$$M_{m,n^k}(n), \;\; m = \pi(n^{k-1}),$$

где $k > 1$ - натуральное число.

Сначала рассмотрим матрицу $M_{m,n^p}(n), \quad m = \pi(n^{p-1})$, и $2 < p$ - простое число.

При любой четности числа n матрица $M_{m,n^p}(n)$ обладает средним столбцом, потому что ее крайние столбцы соотвествуют числам одинаковой четности.

Теорема 5.1.

Средний столбец матрицы $M_{m,n^p}(n)$, где $m = \pi(n^{p-1})$, содержит нулевые остатки не только в строках, которые соответствуют нечетным простым делителям числа n, но и в строке, соотвествующей числу p.

Доказательство.

Так как крайние столбцы матрицы $M_{m,n^p}(n)$ в строках, соотвествущих простым нечетным делителям числа n, (если они есть), имеют нулевые остатки, следовательно и средний столбец этой матрицы имеет эти нулевые остатки. Чтобы убедиться в том, что средний столбец этой матрицы имеет нулевой остаток, в строке, соотвествующей числу p, к двум сторонам матрицы $M_{m,n^p}(n)$ добавим по n столбцов. Получим матрицу $M_{m,n^p+2n}(0_n)$. Так как $p|0_n$, то $p|\lambda^*$, где число λ^* соотвествует среднему столбцу матрицы $M_{m,n^p+2n}(0_n)$, но λ^* соотвествует и среднему столбцу матрицы $M_{m,n^p+2(n-n_1)}(n_1)$, где $1 \le n_1 \le p$. Следовательно $p|\lambda^*$.

Теорема доказана.

Следствие 1.

Средний столбец матрицы $M_{m,n^p+kn}(0_n)$, где $2 < p \le n$ - простое число, в строке, соответствующей числу p, содержит нулевой остаток, если $1 \le k \le n$.

Доказательство Следствия 1. вытекаетиз доказательства Теоремы 5.1, потому что средний столбец матрицы $M_{m,n^p+kp}(0_n)$, где $m = \pi(n^{p-1})$, по отношению к среднему столбцу матрицы $M_{m,n^p+p(k-1)}(0_n)$ перемещен на числовой оси на расстояние p, которое определяется стобцами.

Следствие 2.

Средний столбец матрицы $M_{m,n^p}(1)$, где $2 \nmid n$, $2 < p$ - простое число, $m = \pi(n^{p-1})$, содержит нулевые остатки в строке p и в строка p_i, где $p_i|n,\ p_i > 2$.

Доказательство.

Допустим, что λ^* есть средний столбец матрицы $M_{m,n^p}(1)$, где $m = \pi(n^{p-1})$, $2 < p$ - простое число $2 \nmid n$. Отметим, что при $2 \nmid \lambda$ количество четных числ между числами $1, 2, \cdots, \lambda^*$ на единицу меньше, чем количество четных чисел между числами $\lambda^* + 1, \lambda^* + 2, \cdots, 2\lambda^*$. К обеим сторонам матрицы $M_{m,n^p}(1)$ прибавим по одному столбцу, которые соотвествуют числам 0_n и $n^p + 1$, где $2 \nmid n$, в результате получим матрицу $M_{m,n^p+2}(0_n)$. Так как $p|0_n$, следовательно $p|n^p + 1$, потому что $n^p + 1 = 2\lambda^*$ и λ^* есть средний столбец матрицы $M_{m,n^p-2p}(1)$. Кроме того, λ^* есть и средний столбец матрицы $M_{m,n^p+2n}(2p + 1)$. Поэтому $p_i|\lambda^*$, если $p_i|n$, где $p_i > 2$ - простые нечетные делители числа n, если они есть.

Следствие 3.

Средний столбец матрицы $M_{m,2n-1}(1)$, $m = \pi(n)$, отдален от ее крайних столбцов на равные расстояния, и сумма нулевых и ненулевых остатков в нем равна $\pi(n)$.

Доказательство.

Так как крайние столбцы матрицы $M_{m,2n-1}(1)$ соответствуют нечетным числам, следовательно она обладает средним столбцом, который соответствует числу n. Средний столбец матрицы $M_{m,2n-1}(1)$ обозначим n_s. Тогда количество всех остатков столбца n_s есть

$$\nu_m^*(n) + L_m^*(n) = \pi(n),$$

где $\nu_m^*(n)$ - количество различных простых делителей числа n, каждый из которых меньше или равен n, а $L_m^*(n)$ - количество ненулевых остатков среднего столбца n_s, каждый из которых меньше n.

Так как n_s является не только средним столбцом матрицы $M_{m,2n-1}(1)$, но и средним столбцом матрицы $M_{m,2n+2}(0_n)$, потому что она составлена из чисел $0_n, 0_n + 1, \ldots, 0_n + 2n$. Следовательно, дальность (определяется количеством столбцов) среднего столбца n от 0_n и от $2n$ равны между собой. и равны n отрезков единичной длины.

Теорема 5.2

Если средний столбец матрицы $M_{m,n^p}(n)$, где $m = \pi(p)$, p - простое число, в строке p содержит нулевой остаток, то крайние столбцы матрицы $M_{m,2kp+1}(kp)$ тоже имеют нулевые остатки в строке p, здесь k - натуральное число. И обратно, если крайние столбцы матрицы имеют общие нулевае остатки, то эти остатки имеет и средний столбец.

Доказательство.

Рассмотрим матрицу $M_{m,2kp+1}(kp)$, где $m = \pi(p)$, и $k > p$ - натуральное число. Она составлена из чисел

$$(k-1)p, (k-1)p+1, \ldots, kp, kp+1, \ldots, (k+1)p.$$

Ясно, что средний столбец этой матрицы, который соответствует числу kp, и крайние столбцы, которые соответствуют числам $(k-1)p$ и $(k+1)p$ имеют нулевые остатке в строке p. Нетрудно заметить, что и матрица, составленная из чисел

$$(k-k_1)p, (k-k_1)p+1, \ldots, kp, kp+1, \ldots, (k+k_1)p,$$

в среднем и крайних столбцах имеют нулевые остатке в строке p, где $k \geq p$, а $k_1 \leq p$ - произвольное простое число.

Рассматривая матрицу, составленную из чисел

$$0_n, 0_n+1, \ldots, p^2, \ldots, 2p^2,$$

где $0_n = \prod_{i=1}^{m} p_i$, и расширяя ее, т.е. увеличивая ширину m этой матрицы так, чтобы она стала m_*, где $m_* = \pi(2p^p)$, получим матрицу $M_{m_*,0_n+2}(2)$. Заметим, если $0_n = \prod_{i=1}^{m_*} p_i$, где $m_* = \pi(2p^p)$, то средний столбец этой матрицы, которая состоит из чисел

$$0_n, 0_n+1, \ldots, p^p, \ldots, 2p^p,$$

имеет нулевой остаток в строке p. Крайние столбцы этой матрицы тоже имеют нулевые остатки в строке p. Потому что $p|0_n,\ p|2p^p$. Так как $p|p^p$, следовательно $p|n^p - n,\ p|2n,\ p|p,\ p|np+p$ и обратно.

Следствие 1.

Если $x-y$ кратно p, то $x^p - y^p$ кратно p^2.

Доказательство.

Доказательство тривиально, т.к. если $x-y$ кратно p, где p - простое, а $x.y$ - натуральные числа, тогда это означает, что $x >> y,\ x >> p$. Поэтому $x = kp + y$, где k - тоже натуральное число. Таким образом получаем что $(kp+y)^p - y^p$ кратно p^2.

Замечание.

Из этого Следствия вытекает малая теорема Ферма, потому что сводится к $x^p - x$ кратно xp, где xp означает, что на числовой оси на отрезке $[1, x^p]$ имеется p чисел, которые делятся только на x. Это числа $x, x^2, \ldots, x^p$. Также на этом отрезке имеется $p-1$ чисел, которые кратны только px. Это числа $xp, (xp)^2, \ldots, (xp)^{p-1}$.

Из Теоремы 5.2. можно получить теорему Вилсона: $(p-1)!+1$ кратно p и $0! = 1$. Таким образом, ограничивая числовой отрезок $[0_n, 2n]$, сводим его к отрезку $[-n, +n]$. Числа, которые мы называем натуральными, становятся остатками при делении больших чисел на малые. Например $2p : 2 = p$, учитывая, что p одновременно есть остаток от деления $p^2 : p$, $p^p : p$. Потому что среди чисел $1, 2, \ldots, p^p$ имеется p чисел, каждое из которых кратно только p, т.е. они имеют вид p^k. Это числа $p, p^2, \ldots, p^p$.

Малая теорема Ферма и теорема Вилсона паказывают, что метод математической индукции и метод решета - главные методы изучения числовых соотношений на числовой оси. И в Матричной математике эти методы объединяются.

6 Фокусы и фокусные расстояния в матрицах остатков

Введение

В матрицах остатков каждый столбец характеризуется не только нулевыми остатками, но и ненулевыми. В Теореме 5.3 была получена формула

$$L^*_m(j) + \nu^*_m(j) = \pi(n), \;\; L^*_m(1) = \pi(n) = m.$$

Здесь j - порядковый номер столбца.

Возникает вопрос, по отношению какого столбца определяется номер столбца j? Ведь матрица остатков имеет два крайних столбца, поэтому роль смежных матриц становится решающей.

Рассмотрим смежные матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\lambda+1)$, где $\pi(n) = m$. Так как эти матрицы отличаются только столбцами, которые соответствуют числам λ и $\lambda + n$, а остальные столбцы у них общие, следовательно они, обединяясь, образуют новую матрицу, которая составлена из чисел $\lambda, \lambda+1, \ldots, \lambda+n$. Ясно, что при $2|n$ новая матрица обладает средним столбцом, который можно обозначить λ^*. Число, соответствующее λ^*, назовем фокусом, а числа λ и $\lambda + n$ назовем побочными фокусами новой матрицы.

Каждое из чисел λ, λ^* и $\lambda + n$ характеризуется нулевыми и ненулевыми остатками, которые по абсолютной величине меньше или равны n. Поэтому становится интересным определение не только их количество, но и их расстояние от среднего столбца и от начала числовой оси.

6.1. Фокусные расстояния в матрицах остатков

Общий вид матриц, обладающих средним столбцом обозначим $M_{m,2n-1}(1)$, где $m = \pi(n)$. Средний столбец этой матрицы соответствует числу n, а крайние столбцы числам 1 и $2n-1$. Следовательно, число n является фокусом, а 1 и $2n-1$ - побочными фокусами этой матрицы.

Если фокусы матрицы показывают количество столбцов (целочисленных точек на числовом отрезке), то фокусные расстояния показывают количество отрезков единичной длины (масштабы числовой оси), которые плотно расставлены между этими столбцами (точками). Поэтому фокусные расстояния всегда на 1 меньше, чем количество точек на данном числовом отрезке, с помощью которых составлена данная матрица.

Если рассматриваются матрицы $M_{m,2n-1}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$, $2|\lambda$, то приходится определить фокусные расстояния не только по отношению к фокусам, но и по отношению к началу отсчета.

Теорема 6.1.

Любая квадратная матрица, которая обладает средним столбцом, обладает фокусами и фокусными расстояниями.

Доказательство.

Рассмотрим квадратную матрицу $M_{m,p^2}(1)$, где $m = \pi(p)$. Она обладает средним столбцом, который соответствует простому числу (Теорема 5.1), этот столбец назовем главным фокусом этой матрицы.

Так как

$$M_{m,p^2}(1) = M_{m,2p-1}(1) + M_{m,2p-1}(2p) + M_{m,2p-1}(4p) + \ldots + M_{m,2p-1}(\lambda),$$

где $\lambda = p(p-2)$.

Тогда число p^2 является фокусом, а числа $p(p-1)$ и $p(p+1)$ являются побочными фокусами матрицы $M_{m,2n-1}(\lambda)$.

С другой стороны, если рассмотреть матрицу, составленную из чисел

$$k, k+1, \ldots, \lambda^*, \lambda^*+1, \ldots, 2\lambda^* - k, \tag{6.1}$$

то матрицы, которые фигурируют в формуле (2) по отношению к среднему столбцу тоже имеют фокусы и фокусные расстояния. И если средний столбец называем главным фокусом, то p и p^2 являются фокусами сдвинутых матриц $M_{m,2p}(1)$ и $M_{m,2p}((p-1)^2+1)$, которые по отношению к среднему столбцу передвинуты на равные расстояния.

Следствие.

Если $\nu(n) = 1$, то число n является средним столбцом некоторой квадратной матрицы.

Доказательство.

По условию Следствия имеем, или $n = p_k$ - простое число, или $n = 2^k$.

1)При $n = p_k$ - простое число p_k соотвествует среднему столбцу матрицы $M_{m,p^2}(1)$, где $m = \pi(p)$, потому что средний столбец матрицы $M_{m,p^2}(1)$, где $m = \pi(p), p > 2$ соответствует простому числу p_k. Это следует из Теоремы 5.1.

2) При $n = 2^k$, т.к. $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, следовательно 2^k соответствут среднему столбцу матрицы $M_{m,0_n+2}(0_n)$.

7 Проблемы простых чисел - близнецов

Введение

Если разность двух простых чисел равна $|2|$, то их называют простыми близнецами. Например 3 и 5 или 7 и 5. Со времен Архимеда существует предположение, что количество простых близнецов бесчисленно, но оно пока не доказано. Существование взаимно простых чисел (-1),(+1) подсказывает, что проблема простых близнецов есть следствие основной аксиомы числовой оси, которая гласит, что число 0 (ноль) кратно всем целым числам. Остается доказать это следствие. Собственно говоря, надо доказать более общее следствие.

$$p_{m+1} - p_m = 2^r a,$$

где a и r - натуральное число, $2 \nmid a$.

Ясно, что при $r = a = 1$ получаем проблему простых чисел близнецов.

Теорема 7.1.

Если функции $f^*(2n)$ и $f^*(2n^2)$ показывают количество простых близнецов $< 2n$ и $< 2n^2$, то справедливо неравенство

$$f^*(2n^2) - f^*(2n) \geq 1.$$

Доказательство.

Рассмотрим матрицу остатков $M_{m,2n^2}(1)$, где $m = \pi(n)$. Расширим ее, т.е. каждое число, соответствующее каждому столбцу этой матрицы, разделим еще на квадрат простого числа P_q^2, где $2 < P_q < [\sqrt{2p^2}]$. Полученные остатки запишем в соответствующие столбцы данной матрицы.

Зачеркнем все те столбцы этой матрицы, каждый из которых содержит как минимум два нулевых остатка в строках $1 < i_* \leq i + i^*$, где

$$i = m = \pi(n),\ i^* = m^* = \pi(P_q),\ 2 < P_q \leq [\sqrt{2n^2}],\ m_* = m + m^*$$

.

Обращая внимание на столбцы матрицы $M_{m,n^2}(1)$, которые соответствуют числам $1, 2, 3, \ldots, n^2$ заметим, что среди них количество незачеркнутых столбцов есть

$$k_1^* = \pi(n^2) + [\log_2 n^2].$$

Потому что столбец, который соотвествует числу 1, тоже не зачеркнут.

Рассмотрим столбцы матрицы $M_{m,(n^2-n)}(2n+1)$, которые соответствуют числам $n^2+1, n^2+2, \ldots, 2n^2$. Среди них незачеркнутыми являются столбцы, которые соответствуют числам P_k, где $n^2 < P_k < 2n^2$, и числу 2^r, где $n^2 < 2^r \leq 2n^2$.

Если их количество обозначить k_2^*, то

$$k_2^* = \pi(2n^2) - \pi(n) + 1.$$

Потому, что

$$[\log_2 n^2] - [\log_2 n] \geq [\log_2 n].$$

Следовательно, среди чисел $2n^2 - 2n, 2n^2 - 2n + 1, \ldots, 2n^2$ есть минимум одно число $2p_k$, где $2n^2 - 2n < 2p_k < 2n^2$.

Зачеркивая и те столбцы матрицы $M_{m,2n^2}(1)$, которые не соответствуют простым числам - близнецам, получим формулу

$$f^*(2n^2) - f^*(2n) \geq 1.$$

Потому что, если рассмотреть матрицу $M_{m,2n}(1)$, где $m = \pi(n)$, то столбцы, которые соответствуют простым числам близнецам в матрице $M_{m_*,2n^2}(2n+1)$, где $m_* = \pi(2n^2)$, создают минимум одну пару новых столбцов, которые тоже соотвествуют простым числам близнецам. В противном случае не существовали бы простые числа Мерсена и простые числа Ферма, а числа (-1) и (+1) не были бы взаимно простыми числами. Более подробно мы обсудим эту проблему позже. Таким образом, количество простых чисел близнецов бесконечно.

Теорема 7.2

Если $2^p - 1$, где $p > 3$ - простое число, не кратное 5, то оно простое число.

Доказательство.

Если p - простое число, то число $2^p + 1$ кратно 3. Поэтому число $2^p - 2$ кратно 3. Из этого следует, что одно из чисел $2^p - 2, 2^p + 1$ кратно 5. Потому что шагая с точки (числа)$0_n = \prod_{i=1}^{m}$, $m = \pi(n)$ с длиной шага 2, т.е. шаг равен двум отрезкам единичной длины, если через некоторое

количество шагов наступим на точку (число) $2^p - 2$ и выяснится, что $2^p - 2$ не кратно 5, то следующим шагом наступим на $2^p + 1 = 2^p - 2 + 3$, т.е. это число будет кратно 5. Потому что и четные и нечетные числа можно привести к одинаковой размерности. Разность ближайших четных и нечетных чисел равно 2. То есть и четные и нечетные числа можно свести к сумме определенного количества двоек.

Из Теоремы 6.3 (Матричная математика, часть 1) знаем, что если p - простое число Мерсена (M_p), то $2^p - 1 = q$ - простое число.

Следовательно Теорема 7.2 доказана.

Замечание.

Теорема 7.2 доказывает, что процесс умножения (деления) на числовой оси не всегда есть короткое сложение (вычитание), как это принято считать. Потому что результаты этих операций относительные, т.е. определяются по отношению к различным точкам, но в одном направлении.

Теорема 7.3.

Между двумя последовательными простыми числами Ферма (F_p) имеется минимум одно простое число Мерсена.

Доказательство.

Теоремы 6.3 и 6.4 (Матричная математика, часть 1) утверждают, что

$$F_{p_1} = 2^2 + 1 = 5,\ F_{p_2} = (2^2)^2 + 1 = 17, F_{P_3} = ((2^2)^2)^2 + 1 = 257, \ldots$$

$$M_{p_1} = 2^2 - 1 = 3, M_{p_2} = 2^3 - 1 = 7, M_{p_1} = 2^7 - 1 = 127, \ldots$$

Следовательно, учитывая, что самое малое число Мерсена - это 3, а самое малое простое число Ферма - это 5 (1 не считаем простым числом), получим

$$F_{p_m} < M_{p_{m+1}} < F_{p_{m+1}}.$$

Так как простые числа Мерсена (M_p) можно получить и по серии $M_p = 2^5 - 1 = 31$, и они тоже находятся на положительном участке числовой оси. Следовательно, возможно, что между двумя последовательными числами Ферма попало более одного простого числа Мерсена.

Например. $17 < 31 < 127 < 257$.

Теорема доказана.

Следствие.

Если $0_n = \prod_{i=1}^{m},\ m = \pi(2^n)$ и $\nu(2n) = 1$, то числа 0_{n+1} и 0_{n-1} - простые числа близнецы.

Доказательство.

Из Теоремы 7.3 знаем, что $0_n + 1$ - простое число Ферма, если число $2^{2n} + 1$ простое. По теореме 7.2 число $2^p - 1$ простое число Мерсена,

если p - простое число Мерсена. Следовательно, все зависит от $\nu(n)$, т.е. имеем

$$7 = 6 + 1 = 5 + 2,\ 13 = 12 + 1 = 11 + 2, 19 = 18 + 1 = 17 + 2, \ldots$$

Такую же картину увидим на числовых отрезках $[1, 2, 3, \ldots, 2^n + 1]$ и $[2^{2n} - 2^n - 1, 2^{2n} - 2^n, 2^{2n} - 2^n + 1, \ldots, 2^{2n} + 1]$, если $\nu(2n) = 1$ и $2^n + 1 = F_{p_{m-1}}, 2^{4n} + 1 = F_{p_{m+1}}$ - простые числа Ферма F_p.

8 Деление чисел на числовой оси

Введение

В нашем сознании процесс деления производится как группирование имеющихся объектов, независимо от какого объекта и в каком порядке их выбирают для группирования. Выясняется, что числа на числовой оси тоже можно группировать.

В Матричной математике числа группируются в виде матриц остатков. Как например, если заданы $2n$ последовательных натуральных чисел, то их рассматривают в матрицах $M_{m,n}(\lambda_1)$ и $M_{m,n}(\lambda_2)$, где $m = \pi(n),\ \lambda_2 = \lambda_1 + n + 1$, или $N_{m,n}(2|\lambda)$ и $N_{m,n}(2 \dagger \lambda + 1),\ m = \pi(n)$. В том, или в другом случаях возникают вопросы, связанные со свойствами чисел в каждой матрице в зависимости от величины λ, n и $\pi(n)$. Чтобы ответить на некоторые из этих вопросов рассмотрим матрицы $M_{m,n^2}(1)$ и $M_{m,n^2}(n^2 + 1)$, где $m = \pi(n^2)$.

Теорема 8.1

Справедливо соотношение

$$\pi(n^2) - 2[\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n^2) - \pi(n^2) \leq \pi(n^2) - [\log_2 n] + 1.$$

Доказательство.

Рассмотрим матрицы $M_{m,n^2}(1)$ и $M_{m,n^2}(n^2 + 1)$, где $m = \pi(n^2)$. Расширим эти матрицы, т.е. каждое число, соответствующее каждому столбцу этой матрицы разделим еще на число p_q^2, где $2 < p_q \leq [\sqrt{2n^2}]$ - простое число. Полученные остатки запишем в соотвествующем столбце каждой матрицы.

При расширении матриц их ширина увеличится и станет $m_* = m + m^*$, где $m = \pi(n^2),\ m^* = \pi([\sqrt{2n^2}]) - 1,\ p_q \neq 2$.

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть минимум два нулевых остатков в строках $1 < i_* \leq m + m^*$.

Обращая внимание на матрицы с зачеркнутыми столбцами, заметим, что

1) В матрице $M_{m,n^2}(1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_1^* = \pi(n^2) + [\log_2 n^2].$$

Здесь учтено, что столбец, соотвествующий числу 1, тоже незачеркнут.

2) В матрице $M_{m,n^2}(n^2+1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* = \pi(2n^2) - \pi(n^2) + 1.$$

Так как среди чисел $n^2+1, n^2+2, \ldots, \ldots, 2n^2$ есть одно число вида 2^r.

Расставляя столбцы матриц по максимальной выборке нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились зачеркнутые столбцы, а затем незачеркнутые, и учитывая, что количество столбцов в матрицах равны, сопоставляя матрицы в таком расположении стобцов, получим соотношение

$$\pi(n^2) - 2[\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n^2) - \pi(n^2) \leq \pi(n^2) - [\log_2 n] + 1.$$

Теорема доказана.

Теорема 8.2.

Если $a+b$, где $a > 0, b > 0$, $2 < p$ - простое число, кратное p, то $a^p + b^p$ кратно p^2.

Доказательство.

Так как при $a = b$ теорема верна, следовательно, при $a \neq b$ из за симметричности $a + b$ мы можем принять $a >> b, a >> p$. Но тогда $a = \alpha p - b$, где α тоже целое число. То есть при делении a на p в остатке получается $|b|$. В противном случае мы не можем принять, что число 0 (ноль) кратно a, p и b. Следовательно,

$$(p\alpha - b)^p + b^p = (p\alpha)^p - p(p\alpha)^{p-1}b + \ldots + p(p\alpha) \cdot b^{p-1} - b^p + b^p.$$

Теорема доказана.

Примечание.

Доказательство Теоремы 8.2 тривиально получается из свойств матриц остатков.

Теорема 8.3.

Средний столбец матрицы $M_{m,\lambda^p}(1)$, где $m = \pi(\lambda^{p-1}),\ 2 \dagger \lambda$, содержит нулевой остаток в строке, соотвествующей простому числу $p > 2$.

Доказательство.

Поначалу отметим, что строка, соотвествущая числу p, это та строка, где помещены все остатки, возникающие при делении чисел $1, 2, \ldots, \lambda^p$

на число p. Так как $\lambda^p - \lambda = \lambda(\lambda^{p-1} - 1)$ кратно p и λ. Следовательно, если средний столбец матрицы $M_{m,\lambda^p}(1)$ обозначить λ^*, то λ^* будет и средним столбцом матрицы $M_{m,0_n+2}(0_n)$. Так как $p|0_n$, то $p|2\lambda^*$, отсюда следует, что $p|\lambda^*$, если $p > 2$.

Теорема доказана.

Следствие.

Уравнение $x^p + y^p = z^p$ при $(x, y) = 1, (x, z) = 1, (y, z) = 1$ при $p > 2$ не имеет решений в целых числах.

Доказательство.

Допустим, что заданы матрицы $M_{m,x^p}(1), M_{m,y^p}(1)$, где $2\dagger x, 2\dagger y, (x, y) = 1$. Если x^*, y^* соответствуют средним столбцам этих матриц, то по Теореме 8.3 имеем $2p|2x^*, 2p|2y^*$, потому, что x^* соответствует также и среднему столбцу матрицы $M_{m,0_n+2}(0_n)$. Здесь $0_n = 0_x = \prod_{i=1}^{m} p_i$. Так как уравнение $x^p + y^p = z^p$ симметрично по отношению к неизвестным x, y, z, то мы также можем получить, что $2|2z^*$, где z^* есть средний столбец матрицы $M_{m,z^p+2}(2)$. Ясно, что при $p > 2$ получим $(x, y, z) = p$, и уравнение $x^p + y^p = z^p$ при $(x, y) = 1, (x, z) = 1, (y, z) = 1$ может иметь решение в целых числах только тогда, когда $p = 2$.

9 Функция $\pi(n)$ и проблема криптографии

Введение.

Как известно, функция $\pi(n)$ показывает количество простых чисел, не превосходящих числа n, а $\nu(n)$ - есть количество различных простых делителей числа n. Со времен Архимеда ищут способы более легким путем определить $\pi(n)$ и $\nu(n)$. Но эти методы становятся беспомощными, когда $n \to \infty$. В современном развитии теоретической и прикладной математики функции $\pi(n)$ и $\nu(n)$ имеют решающее значение. Поэтому любая область науки не обходится без электоронно-вычислительных машин (ЭВМ). В данной статье моя цель не привести факты, подтверждающие сказанное, а с помощью матриц остатков облегчить процесс определения величин $\pi(n)$ и $\nu(n)$, что является важной проблемой криптографии.

Теорема 9.1.

Имеет место соотношение

$$(\pi(p))^2 - [\log_2 p] - 1 \leq \pi(p^2) \leq (\pi(p))^2 + [\log_2 p] + 1. \qquad (9.1)$$

Доказательство.

Рассмотрим квадратную матрицу $M_{m,p^2}(1), m = \pi(p)$, она обладает средним столбцом, который обозначили λ^*, ранее мы доказали, что

λ^* соотвествует простому числу. Расширяя эту матрицу, мы получили соотношение

$$\pi((p+1)^2) - 2[\log_2 p] - 1 \leq \pi(p^2) \leq \pi((p-1)^2) - [\log_2 p] + 1. \qquad (9.2)$$

Это Следствие Теоремы 4.3.

Возникает вопрос, как можно усилить формулу (9.2)? Ведь матрицу $M_{m_*,p^2}(1)$ можно представить в виде

$$M_{m_*,p^2}(1) = M_{m_*,2p}(1) + M_{m_*,2p}(2p+1) + \ldots + M_{m_*,2p}((p-1)^2+1), \quad (9.3)$$

а также в виде

$$M_{m_*,p^2}(1) = M_{m_*,\lambda}(1) + M_{m_*,\lambda}(\lambda+1), \qquad (9.4)$$

и в виде

$$M_{m_*,p^2}(1) = N_{m_*,\lambda}(2 \dagger 1) + N_{m_*,\lambda}(2|2) \qquad (9.5)$$

Здесь $\lambda = \left[\frac{p^2}{2}\right],\ m_* = m + m^*,\ m = \pi(\lambda),\ m^* = \pi(\sqrt{2\lambda}),\ p_q \neq 2.$

А также еще в виде

$$M_{m_*,p^2}(1) = M_{m_*,p}(1) + M_{m_*,p}(p+1) + \ldots + M_{m_*,p}((p-1)^2 - 1). \quad (9.6)$$

Равенство (9.6) символично можно представить в виде

$$M_{m,p^2}(1) = (M_{m,p-1}(1))^2 \qquad (9.7)$$

Величина p^2 показывает количество всех натуральных чисел на числовом отрезке $[1, p^2]$.

Рассмотрим матрицы $M_{m,\lambda}(1)$ и $M_{m,\lambda}(\lambda+1)$, где $\lambda = \left[\frac{p^2}{2}\right], m = \pi(\lambda)$. Расширим их, т.е. каждое число, соответствующее каждому столбцу данной матрицы, разделим на $2 < p_q \leq [\sqrt{2p^2}]$ и на $\lambda < 2^r \leq 2\lambda$. Полученные остатки запишем в данных столбцах каждой матрицы.

1) В матрице $M_{m_*,\lambda}(1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_1^* = \pi(\lambda) + [\log_2 p].$$

2) В матрице $M_{m_*,\lambda}(\lambda+1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* = \pi(2\lambda) - \pi(\lambda).$$

Расставим столбцы расширенных матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились

зачеркнутые столбцы, а потом незачеркнутые. Так как количество столцов матриц совпадает, сопоставляя их в таком расположением стобцов, получим соотношение (9.1).

Следствие 1.

Имеет место соотношение

$$(\pi(n+1))^2 - 2[\log_2 p] - 1 \leq \pi(n^2) \leq (\pi(n-1))^2 + [\log_2 p] + 1. \qquad (9.8)$$

Доказательство Следствия 1 нетрудно получить из доказательства Теоремы 9.1, если учесть, что формулы (9.1) и (9.2), можно усилить, учитывая $\nu(n+1), \nu(n)$ и $\nu(n-1)$.

Следствие 2.

Имеет место соотношение

$$2[\log_2 n] - 1 \leq \pi((n+1)^2) - \pi((n-1)^2) \leq [\log_2 n] + 1. \qquad (9.9)$$

Доказательство.

Рассмотрим матрицу $N_{m,n^2}(2\dagger 1)$ и матрицу $N_{m,n^2}(2|2)$, где $m = \pi((n-1)^2)$. Зачеркнем все те столбцы у этих матриц, каждый из которых содержит как минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq m = \pi((n-1)^2)$.

1) В матрице $N_{m,n^2}(2\dagger 1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_1^* = \pi((n+1)^2) - \pi((n-1)^2) + 1.$$

Столбец, соотвествующий числу 1, тоже незачркнут.

2) В матрице $N_{m,n^2}(2|2)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* = 2[\log_2 n].$$

Расставляя столбцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим соотношение (9.9). Следствие 2. доказано.

Замечание.

По этому следствию можно определить точное количество простых чисел в любом промежутке чисел на числовой оси.

Следствие 3. Имеет место соотношение

$$\pi(N) = (\pi(n))^2, \;\; n = [\log_4 N]. \qquad (9.10)$$

Доказательство.

Так как $2^{2N} = 2^N 2^N$, $[\log_4 N] = [\log_2 2N]$. Допустим, что $[\log_4 N] = n$, тогда можно не только оценить $\pi(N)$ но и $\pi(N^2)$, поскольку

$$\pi(N) = (\pi(n))^2 + [\log_2 n], \;\; n = [\log_4 N].$$

Теорема 9.2

Если $2 \dagger N$, то

$$\nu(N) = \nu(\nu(n_1) + \nu(n_2) + \nu(n_3) + \nu(n_4) + \nu(15)),$$

а если $2|N$, то

$$\nu(N) = \nu(\nu(n_1) + \nu(n_2) + \nu(n_3) + \nu(n_4) + \nu(30)),$$

где

$$n_1 = [\log_2 N];\; n_2 = [\log_3 N];\; n_3 = [\log_4 N];\; n_4 = [\log_5 N].$$

Доказательство.

Так как средний столбец матриц $M_{m,2^{2N}+2}(0_n)$ и $M_{m,2^{2N}+1}(1)$, где $m = \pi(2^N), 0_n = \prod_{i=1}^{m} p_i$, совпадают, следовательно число $2^{2N} + 2$ может содержать нулевые остатки в столбцах, которые соответсвуют числам $n_1 = [\log_2 N];\; n_2 = [\log_3 N];\; n_3 = [\log_4 N];\; n_4 = [\log_5 N]$ и числу 30, если $2|N$, а если $2 \dagger N$, то числу 15. Но в этих столбцах могут быть повторяющиеся простые делители, а нас интерисуют только различные простые делителеличисла N. Поэтому получает утверждение Теоремы 9.2.

Примечание.

Ясно, что с помощью теоремы 9.2 можно определить и все делители числа N.

Теорема 9.3

Имеет место соотношение

$$[\log_2 n] - 1 \leq \pi((n+1)^2) - \pi(n^2) \leq [\log_2 n] + 1. \qquad (9.11)$$

Доказательство.

Рассмотрим матрицы $M_{m,n^2}(1)$ и $M_{m,n^2}(2n+1)$, где $m = \pi(n^2)$. Расширим их, т.е. разделим каждое число, которое соотвествует каждому столбцу этих матриц, на число p_q^2, где p_q - простое число, токое, что $2 < p_q \leq [\sqrt{2n^2}]$. Полученные остатки занесем в соотвествующие столбцы данной матрицы.

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, каждый из которых содержит минимум два нулевых остатков в строках $1 < i \leq \pi(n^2)$.

1) Количество незачеркнутых столбцов в матрице $M_{m,n^2}(1)$ есть

$$k_1^* = 2[\log_2 n] + \pi(n^2),$$

т.к. столбец, соотвествующий числу 1, тоже не зачеркнут.

2) В матрице $M_{m,n^2}(2n+1)$ количество незачеркнутых столбцов есть

$$k_2^* \leq \pi((n+1)^2) - \pi(n^2) + 1.$$

Так как возможно среди чисел $n^2+1, n^2+2, \ldots, (n+1)^2$ имеется одно число вида 2^r.

Учитывая, что матрицы $M_{m,n^2}(1)$ и $M_{m,n^2}(2n+1)$ имеют общие столбцы, которые соотвествуют числам $2n+1, 2n+2, \ldots, n^2$. Мы можем их не учитывать и сравнивать матрицы $M_{m,2n}(1)$ и $M_{m,2n}(n^2+1)$ с уже зачеркнутыми столбцами.

Расставляя столбцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились зачеркнутые столбцы, а потом незачеркнутые, и учитывая, что

$$\overline{M}_{m,n^2}(2n+1) - \overline{M}_{m,n^2}(1) = \overline{M}_{m,2n}(n^2+1) - \overline{M}_{m,2n}(1) = c(m,n,2n+1).$$

Сопоставляя матрицы с таким расположение столбцов, получим соотношением (9.11). В противном случае получим, что матрицы не имеют равного количества столбцов.

Теорема 9.4.

Имеет место соотношение

$$2\pi(n^2) - \pi(n) \leq \pi(2n^2) \leq 2\pi(n^2) - \left[\frac{\pi(n)}{2}\right] + 1. \tag{9.12}$$

Доказательство.

Рассмотрим матрицы $M_{m,n^2}(1)$ и $M_{m,n^2}(n^2+1)$, где $m = \pi(n)$. Расширим их как в Теореме 9.3. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, каждый из которых соответствует составному числу.

1) Количество незачеркнутых столбцов в матрице $M_{m,n^2}(1)$ есть

$$k_1^* = \pi(n^2) + 1,$$

т.к. столбец, соотвествующий числу 1, тоже не зачеркнут.

2) В матрице $M_{m,n^2}(n^2+1)$ количество незачеркнутых столбцов есть

$$k_2^* = \pi(2n^2) - \pi(n^2).$$

Так как в каждой строке каждой матрицы есть n^2 нулевых и ненулевых остатков, а в каждом столбце этих же матриц есть $\pi(n)$ нулевых и ненулевых остатков, следовательно в матрице $M_{m,n^2}(1)$ из k_1^* незачеркнутых столбцов только $\pi(n)$ столбцов имеют по одному нулевому остатку, а остальные являются пустыми, т.е. они не имеют нулевых остатков. Они составлены только из ненулевых остатков. В матрице $M_{m,n^2}(n^2+1)$ все k_2^* незачеркнутых столбцов являются пустыми. Расставим столбцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые. Сопоставим матрицы с таким расположением стобцов, получим соотношение (9.12).

Теорема 9.5.

Имеет место соотношение

$$2(\pi(n))^2 - 2[\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n^2) \leq 2(\pi(n))^2 - [\log_2 n] + 1. \qquad (9.13)$$

Доказательство.

Рассмотрим матрицы $M_{m,n^2}(1)$ и $M_{m,n^2}(n^2+1)$, где $m = \pi(n)$. Расширим их как в Теореме 9.3. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, каждый из которых в строках $1 < i \leq m$ имеет минимум 2 нулевых остатка.

1) Количество незачеркнутых столбцов в матрице $M_{m,n^2}(1)$ есть

$$k_1^* = \pi(n^2) + 2[\log_2 n],$$

т.к. столбец, который соотвествует числу 1, составлен только их ненулевых остатков. Следовательно, в этих k_1^* незачеркнутых столбцах количество ненулевых остатков есть

$$k_1 = k_1^* \cdot \pi(n) - k_1^* + 1 = k_1^*(\pi(n) - 1) + 1.$$

2) В матрице $M_{m,n^2}(n^2+1)$ количество незачеркнутых столбцов есть

$$k_2^* = \pi(2n^2) - \pi(n^2) + 1.$$

Так как среди чисел $n^2+1, n^2+2, \ldots, (n+1)^2$ имеется только одно число вида 2^r. Следовательно, в этих k_2^* незачеркнутых столбцах количество ненулевых остатков есть

$$k_2 = k_2^* \cdot \pi(n) - 1.$$

Потому что в каждом из столбцов матриц есть $\pi(n)$ нулевых и ненулевых остатков, и в каждой строке каждой матрице есть n^2 нулевых и ненулевых остатков.

После расширения матриц имеет место соотношение

$$\overline{M}_{m_*,n^2}(n^2+1) - \overline{M}_{m_*,n^2}(1) = c_*(m_*, n, n^2+1).$$

Учитывая это соотношение, сопоставим матрицы у которых столбцы расположены так, что с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а с другй зачеркнутые, получим соотношение (9.13).

Замечание.

Учитывая $\nu(2n^2)$, величину $\pi(2n^2)$ можно определить с точностью до 1.

Теоремы 9.3-9.5 тоже являются следствиями Теоремы 9.1.

Но т.к. они оценивают количество простых чисел на различных участках числовой оси по отношению к нулевой точке (начало отсчета), мы рассматриваем их как отдельные теоремы.

10 Соизмеримые и несоизмеримые отрезки

Упрощая уравнение

$$(xn)^2 + (yn)^2 = (zn)^2, \tag{10.1}$$

где n - произвольное натуральное число, и принимая $x = y = a,\ z = d$, получаем

$$a^2 + a^2 = d^2, \tag{10.2}$$

где a - сторона, d - диагональ квадрата.

Существующая математика вместо объснения равенства (10.2) удовлетворяется только объявлением, что сторона и диагональ квадрата - несоизмеримые отрезки. Этим самым проблема „магических квадратов“ загоняется в тупик так, что математики почти ее не замечают. Но зря, потому что объяснение истиной сущности равества (10.2) привело бы к тем противоречиям, которые возникают на числовой оси из за главной аксиомы, которя гласит, что число „НОЛЬ“ кратно всем целым числам.

Матричная математика рассматривает равенство (10.2) как сумму двух подобных матриц, имеющих тождественно одинаковые размеры, и превращает его в тождество. Так как количество нечетных чисел на отрезке $[1, 2n-1]$ и четных чисел на отрезке $[2, 2n]$ составлено из n таких отрезков, в каждом из которых содержится два отрезка единичной длины. Следовательно, они имеют равную длину, но определены (измерены) по отношению к различным точкам на числовой оси.

Для несоизмеримых отрезков имеет место соотношение

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2+2^2+4^2+\ldots+(2n)^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n)^2. \tag{10.3}$$

Представляя четные и нечетные числа на различных числовых осях, начало отсчета у которых по отношению друг к другу смещены на отрезок единичной длины, приводим их к единой размерности. Это позволяет рассматривать нечетные (четные) числа, как сумму определенного количества двоек. Таким образом на числовой оси числовые операции производятся не точками, которые именовались числами, а количетвом единичных отрезков, которые плотно расставлены между этим точками (числами). Изучение числовых процессов облегчается, если мы рассматриваем их на различных числовых осях, для которых как масштаб используются простые числа $\leq n$. Таким образом, каждому простому числу соотвествует своя ось, на которой это простое число задает масштаб. При доказательстве теорем с помощью матриц остатков мы воспользовались этим способом, т.е. иногда мы использовали $\pi(n)$ осей. С точки зрения существущей математики в равенстве (10.2) переход от $(a,a)=a$ к $(a,d)=1$ необъясним, потому что теряется истинная сущность равенства. Но в матричной математике это становится полностью ясным и объяснимым. Числовой „хаос“, который „главная аксиома“ создает на числовой оси, матрица остатков приводит к определенной закономерности.

Матричная математика привела нас к тому, что масштаб числовой оси не может стать нулем, и не зависит от того, занимает он часть прямой, или кривой линии. С увеличением (уменьшением) числа сторон правильного многоугольника, в которые вписаны (описаны) окружности, невозможно добиться равенства их радиусов. В данном многоугольнике радиусы описанной и вписанной окружностей образуют между собой угол определенной величины, который зависит только от стороны многоугольника, или, точнее, от масштаба числовой оси, на которой лежит данная сторона. Превращая уравнение $x^2+y^2=z^2$ в равенство $x^2+y^2=r^2$ или в равенство $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ одновременно превращаем их в тождества, которые показывают расстояние между двумя точками на различных участках, и зависят только от масштаба данной числовой оси.

11 Противолежащие и сдвинутые матрицы остатков

Определение 1.

Подобные матрицы, которые не имеют общих столбцов, называются противолежащими матрицами остатков. Например, матрицы $M_{m,n}(\lambda_1)$ и $M_{m,n}(\lambda_2)$, где $m = \pi(n), |\lambda_1 - \lambda_2| > n$.

Определение 2.

Подобные матрицы, имеющие общие столбцы, называются сдвинутыми матрицами остатков. Например, матрицы $M_{m,n}(\lambda_1)$ и $M_{m,n}(\lambda_2)$, где $m = \pi(n), |\lambda_1 - \lambda_2| < n$.

Определение 3.

Расстояние между двумя точками на числовой оси равно разности чисел, соотвествущих этим точкам.

Определение 4.

Порядковые номера столбцов матриц определяются не только по отношению к начальному стобцу в правую сторону, но и по отношению к началу отсчета на данной числовой оси.

Теорема 11.1

В противолежащих матрицах $M_{m,n}(\lambda_1)$ и $M_{m,n}(\lambda_2)$, где $m = \pi(n), |\lambda_1 - \lambda_2| > n$, имеется не менее чем $\left[\frac{[\log_2 n]}{2}\right] - 1$ столбцов,в каждом из которых нет ни одного нулевого остатка в строках $1 < i \leq m$, если $8 < n < \lambda$.

Доказательство.

Рассмотрим матрицы $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(\lambda)$, где $m = \pi(n), 8 < n < \lambda$. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть как минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq m$.

1) В матрице $M_{m,n}(1)$ количество зачеркнутых столбцов есть

$$k_1 = n - [\log_2 n] - 1,$$

а количество незачеркнутых стобцов есть

$$n - k_1 = [\log_2 n] + 1.$$

Потому что столбец, соотвествущий числу 1 не зачркнут.

2) В матрице $M_{m,n}(\lambda)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим $k_2^* = \alpha_1 + \alpha_2$.

Где α_1 - количество тех незачеркнутых столбцов, в каждом из которых есть только один нулевой остаток, и этот нулевой остаток находится в строке $i = 1$. α_2 - количество тех незачеркнутых столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, которые являются пустыми, т.е. не имеют нулевых остатков.

Следовательно, количество зачеркнутых столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ есть

$$k_2 = n - k_2^* = n - (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Если $k_2 \leq k_1$, то теорема тривиальна.

Допустим что $k_2 > k_1$ и выясним взаимосвязь величин α_1 и α_2, учитывая, что $k_2 - k_1 \leq [\log_2 n] + 1$, потому что матрицы $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(\lambda)$ имеют одинаковое количество столбцов.

Поскольку

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1) = c(m,n,\lambda). \tag{11.1}$$

Так как $c^*(m,n,\lambda)$ расчитана только по строкам $1 < i \leq m = \pi(n)$ получаем, что $c^*(m,n,\lambda) \leq c(m,n,\lambda)$ и при $2 \dagger n, 2|\lambda$ количество четных столбцов (соотвествущих четным числам) в матрице $M_{m,n}(\lambda)$ на 1 больше, чем количество четных столбцов в матрице $M_{m,n}(1)$, то имеет место соотношение

$$\overline{M}_{m,n}^{k_2}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}^{k_1}(1) \geq c^*(m,n,\lambda) + \alpha_1 + 1. \tag{11.2}$$

Вычитая (11.2) из (11.1), получим $\alpha_1 - [\log_2 n] \leq -1 - \alpha_1$, или

$$\alpha_1 \leq \left[\frac{[\log_2 n]}{2}\right] - 1.$$

Таким образом получаем, что количество незачеркнутых столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ есть

$$k_2^* - \alpha_1 = \alpha_2 \geq \left[\frac{[\log_2 n]}{2}\right].$$

Потому что возможно число $a = [\log_2 n]$ - нечетное.

Отметим, что

1) При $\lambda \leq n^2$ получаем, что α_2 - количество простых чисел на отрезке $[\lambda, \lambda + n - 1]$.

2) При $\lambda > n^2$ среди α_2 чисел могут быть числа вида $p_k^r, p_c p_d$, где p_k, p_c, p_d - простые числа, большие n.

Так как в доказательстве теоремы $\lambda > n$ может принимать произвольные значения, следовательно Теорема верна для всех противолежащих матриц $M_{m,n}(\lambda_1)$ и $M_{m,n}(\lambda_2)$, где $m = \pi(n), |\lambda_1 - \lambda_2| > n$.

Теорема 11.1 полностью доказана.

Следствие.

В матрице $M_{m,2n}(\lambda)$, где $8 < n < \lambda < n^2,\ m = \pi(n)$:

1) Имеется не менее $[\log_2 n] - 1$ столбцов, в каждом из которых нет ни одного нулевого остатка в строках $1 \leq i \leq m = \pi(n)$.

2) Имеется не более $\pi(2n) - \pi(n)$ столбцов, в каждом из которых нет ни одного нулевого остатка в строках $1 \leq i \leq m = \pi(n)$.

Доказательство.

1) Так как матрицу $M_{m,2n}(\lambda)$ и матрицу $M_{m,2n}(1)$ можно представить в виде

$$M_{m,2n}(\lambda) = M_{m,n}(\lambda) + M_{m,n}(\lambda + n),$$

$$M_{m,2n}(1) = M_{m,n}(1) + M_{m,n}(1 + n),$$

где $m = \pi(n)$, то применяя к ним доказательство Теоремы 11.1, получим доказательство пункта 1) Следствия.

2) Рассматривая матрицы $M_{m,2n}(1)$ и $M_{m,2n}(\lambda)$, где $8 < n < \lambda < n^2$, $m = \pi(n)$ как противолежащие матрицы, можно аналогично доказательству теоремы получить доказательство пункта 2) Следствия.

ЭДВАРД Л. МКРТУМЯН